Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

20.10.2014

Wavelet-Analysis

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 28.10., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 4 Signal-Rekonstruktion aus diskreten Haar-Koeffizienten
Gegegen seien die Haar-Koeffizienten

$$\begin{array}{llll} c_0 = 1/\sqrt{2}, & c_1 = 5/\sqrt{2}, & c_2 = 1, & c_3 = 0 \\ c_4 = -\sqrt{2}, & c_5 = 3\sqrt{2}, & c_6 = -2\sqrt{2}, & c_7 = 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Umkehrformeln

$$\begin{aligned} a(x_0,\ldots,x_{M/2-1}) &= a(x_0,\ldots,x_{M-1}) + d(x_0,\ldots,x_{M-1}) \quad \text{und} \\ a(x_{M/2},\ldots,x_{M-1}) &= a(x_0,\ldots,x_{M-1}) - d(x_0,\ldots,x_{M-1}) \end{aligned}$$

aus der Vorlesung das zugehörige Signal $x \in \ell_8$.

Aufgabe 5 Die Klasse $\mathrm{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt per Definition Hölder-stetig zum Exponenten $0 < \alpha \leq 1$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls $K > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; K\, |x-y|^\alpha \qquad \forall x, y \in I. \tag{1}$$

In diesem Fall schreibt man auch $f \in \mathrm{Lip}^\alpha(I)$. Des Weiteren wird die Hölderkonstante von f durch

$$[f]_\alpha \;=\; \sup_{x \neq y \in I} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

definiert. Weisen Sie die folgenden Aussagen nach:

(i) Falls für $f : I \to \mathbb{C}$ ein $K > 0$ existiert, welches die Bedingung (1) mit dem Exponenten $\alpha > 1$ erfüllt, so ist f auf I konstant.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha = 1$, in $x_0 = 0$ jedoch lediglich Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha = 1/2$.

(iii) Sei $I = [0, 1/2]$. Die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) \;=\; \begin{cases} (\ln x)^{-1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist gleichmäßig stetig auf I, aber es existiert kein $\alpha \in (0, 1]$, so dass $g \in \mathrm{Lip}^\alpha(I)$.

(iv) Für $I \subset \mathbb{R}$ kompakt wird der Raum $\mathrm{Lip}^\alpha(I)$ durch die Abbildung

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}^\alpha(I)} \;=\; \|\cdot\|_{\infty,I} + [\cdot]_\alpha$$

zu einem Banachraum.

Definition: Falls für $\nu \in \mathbb{N}_0$ und eine (Lebesgue-)integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ das Integral

$$M_\nu(f) \;:=\; \int_I t^\nu f(t)\, dt$$

existiert, so heißt es das *ν-te Moment* von f. Gilt für ein $L \in \mathbb{N}$ die Beziehung $M_k(f) = 0$, $0 \le k \le L-1$, und $M_L(f) \neq 0$, so besitzt f genau L *verschwindende Momente.*

Aufgabe 6 Mexican Hat Wavelet
Zu $\sigma > 0$ definiert

$$\begin{array}{rccl} \psi_\sigma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \end{array}$$

eine auf Grund ihres Aussehens als das *Mexican Hat Wavelet* bezeichnete Funktion. Zeigen Sie, dass diese Funktion genau zwei verschwindende Momente besitzt.

Aufgabe 7 Eine Aussage zu verschwindenden Momenten
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$M_\nu(f) := \int_{\mathbb{R}} t^\nu\, f(t)\, dt < \infty, \qquad 0 \le \nu \le L-1$$

und $M_0(f) \neq 0$ sowie Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in \mathbb{R}$ für $1 \le k \le K$.
Zeigen Sie, dass

$$g(t) := \sum_{k=1}^{K} c_k\, f(t - s_k)$$

genau dann L verschwindende Momente besitzt, wenn

$$\sum_{k=1}^{K} c_k\, s_k^\nu = 0, \qquad 0 \le \nu \le L-1,$$

gilt.