Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

27.10.2014

Wavelet-Analysis

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 04.11., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Poissonsche Summenformel: Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Falls $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\cdot + k)$ von beschränkter Variation auf $[0,1]$ ist, so gilt

$$\text{(PSF)} \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)e^{-2\pi i j\omega} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k+\omega)$$

in allen Stetigkeitspunkten der rechten Seite.

Aufgabe 8 Eine Anwendung der Poissonschen Summenformel
Zu $a > 0$ sei die Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiert als $f(t) = \frac{2a}{a^2+(2\pi t)^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$\hat{f}(\omega) \;=\; e^{-a|\omega|}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(ii) Folgern Sie, dass f eine stochastische Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt (d.h. $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$) und geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.

(iii) Verwenden Sie die Poissonsche Summenformel um die aus der Analysis bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

nachzuweisen.

Aufgabe 9 Autokorrelation
Die Autokorrelationsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}\,dy = \left(f * \tilde{f}\right)(x),$$

wobei $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(i) Begründen Sie, dass $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ und geben Sie $\hat{F}$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass $\hat{F} \in L^1(\mathbb{R})$ und beweisen Sie, dass unter der Zusatzbedingung $f \in L^1(\mathbb{R})$ die Fourierkoeffizienten der Reihe $\Phi_{\hat{F}}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}(\omega+k)$ gegeben sind durch

$$c_j \;=\; F(-j).$$

Aufgabe 10 Shift-invariante Räume

Ein Raum $V \subset L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, heisst *(ganzzahlig) translations-* bzw. *shift-invariant*, wenn

$$f \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\cdot + k) \in V, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Weiter sei für $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ und $c \in \ell^p(\mathbb{Z})$ die *semidiskrete Faltung* definiert als

$$\varphi * c \ := \ \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \varphi(\cdot - j),$$

falls diese Reihe konvergiert, und

$$\mathbb{S}_p(\varphi) \ = \ \{\varphi * c \ : \ c \in \ell^p(\mathbb{Z})\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Die Räume $\mathbb{S}_p(\varphi)$ sind translationsinvariant.

(ii) Es ist $\mathbb{S}_1(\varphi) \subset L^1(\mathbb{R})$.

(iii) Für $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$ gilt $(\varphi * c)\widehat{\ }(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)\hat{c}(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$, wobei

$$\hat{c}(\omega) \ = \ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2k\pi i \omega}.$$

(iv) Falls $\hat{\varphi}(0) = 0$, so besitzt $\varphi * c$ mindestens ein verschwindendes Moment für jedes $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$.