Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

03.11.2014

Wavelet-Analysis

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 11.11., 11:11 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 11 Charakterisierungen von Wavelets

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Falls $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ Wavelet ist, so gilt

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}(2^j\omega)\right|^2 \quad < \quad \infty \qquad \text{für fast alle } 1 \leq |\omega| \leq 2.$$

(ii) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist genau dann Wavelet, wenn

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}(2^j\cdot)\right|^2 \in L^1([-2,-1]\cup[1,2]).$$

Aufgabe 12 Ein Beispiel zur kontinuierlichen Wavelet-Transformation

Sei $f(t) = |t|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein Wavelet sowie $a > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $W_\psi f(a,b) = a^{\alpha+1/2} W_\psi f(1, b/a)$.

(ii) Warum reicht es nicht aus, das Verhalten von $W_\psi f(a,0)$ zu betrachten, um auf die lokale Lipschitz-Ordnung von f an der Stelle $x = 0$ zu schließen?

Aufgabe 13 Kardinale B-Splines

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion $N_0 = \chi_{[0,1)}$ wird für $j \in \mathbb{N}$ der j-te *kardinale B-Spline* definiert als

$$N_j = N_0 * N_{j-1} = \int_0^1 N_{j-1}(\cdot - t)\, dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp}(N_j) = [0, j+1]$ und $N_j \in C^{j-1}(\mathbb{R})$.

(ii) Geben Sie die Fouriertransformierte $\hat{N}_j$ an.

(iii) Geben Sie (endliche) Folgen a_0 und a_1 an, so dass die Funktionalgleichung

$$N_j \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_j(k) N_j(2\cdot - k)$$

für $j = 0, 1$ erfüllt wird.

Aufgabe 14 Ein Zusatz zu shift-invarianten Räumen
Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Der Durchschnitt shift-invarianter Räume ist shift-invariant.

(ii) Die direkte Summe shift-invarianter Räume ist shift-invariant.

(iii) Das orthogonale Komplement shift-invarianter Räume ist shift-invariant.

(iv) Die Menge aller Wavelets in $L^2(\mathbb{R})$ bildet einen shift-invarianten Raum.