Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

10.11.2014

Wavelet-Analysis

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 18.11., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 15 Faltung verfeinerbarer Funktionen
Gegeben seien zwei *verfeinerbare* Funktionen $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, d.h., dass die Funktionalgleichungen

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\varphi(2\cdot -k) \quad \text{bzw.} \quad \psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b(k)\psi(2\cdot -k)$$

mit passenden Folgen $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ erfüllt sind. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung

$$\varphi * \psi \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k)(\varphi * \psi)(2\cdot -k)$$

mit entsprechendem $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ gilt.

Aufgabe 16 Das Klammerprodukt
Für die Fouriertranformierten von $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ist das *Klammerprodukt* definiert als

$$[\hat{f}, \hat{g}](\omega) \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + k)\overline{\hat{g}(\omega + k)}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 [\hat{f}, \hat{g}](\omega)\, d\omega \quad = \quad \langle f, g\rangle.$$

(ii) Beweisen Sie, dass $[\cdot, \cdot]$ die Eigenschaften eines inneren Produkts erfüllt.

(iii) Zu den Funktionen $\phi_1, \phi_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ seien $f \in \mathbb{S}_1(\phi_1)$ und $g \in \mathbb{S}_1(\phi_2)$, d.h. es existieren $c, d \in \ell^1(\mathbb{Z})$ mit

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \phi_1(\cdot - k) \quad \text{und} \quad g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\, \phi_2(\cdot - k).$$

Zeigen Sie, dass mit den trigonometrischen Polynomen $\hat{c} = \sum_k c_k e^{-2\pi i k\cdot}$ und $\hat{d} = \sum_k d_k e^{-2\pi i k\cdot}$ die folgende Beziehung gilt:

$$[\hat{f}, \hat{g}](\omega) \quad = \quad \hat{c}(\omega)\, \overline{\hat{d}(\omega)}\, [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 17 Ein weiterer shift-invarianter Raum
Zeigen Sie, dass der Teilraum

$$V = \{f \in L_1(\mathbb{R}) \ : \ \hat{f}(0) = 0\}$$

von $L_1(\mathbb{R})$ shift-invariant bzgl. $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 18 Euler-Zahlen und Euler-Frobenius-Polynome
Das *(modifizierte) Euler-Frobenius-Polynom* $\tilde{E}_j$ vom Grad $j \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\tilde{E}_j(x) \quad = \quad \sum_{\nu=1}^{j} a_{j,\nu}\, x^{\nu-1}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $a_{j,\nu} = j!\, N_j(\nu)$ die Koeffizienten der Monomdarstellung und N_j den j-ten kardinalen B-Spline aus Aufgabe 13 bezeichnet.

(i) Bestimmen Sie unter Verwendung der Notation $(y)_+ := \max\{0, y\}$ und der Identität

$$N_j \quad = \quad \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} (\cdot - k)_+^j, \qquad j \geq 0,$$

explizit die Koeffizienten $a_{j,\nu}$ aus (1) für $j = 1, \ldots, 5$.

(ii) Geben Sie mit Hilfe der allgemeinen Rekursionsformel

$$N_{j+1}(x) \quad = \quad \frac{x}{j+1} N_j(x) + \frac{j - x + 2}{j+1} N_j(x-1), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und $N_1(\ell) = \delta_{\ell,1}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $a_{j,\nu}$ an.

(iii) Beweisen Sie für $j \geq 0$ die *Worpitzky-Identität*

$$x^{j+1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{j} a_{j+1,k+1} \binom{x+k}{j+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* für $x \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}_0$ definiert ist als

$$\binom{x}{j} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!}, & j > 0, \\ 1, & j = 0. \end{cases}$$