Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

17.11.2014

Wavelet-Analysis

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 25.11., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 19 Riesz- und Orthonormalbasen in shiftinvarianten Räumen
Gegeben sei eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, deren Familie der Shifts $\Phi = \{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis des Raumes $S_2(\phi)$ bildet.

(i) Es sei $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|\tau|^2 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$. Zeigen Sie, dass dann $\{\eta(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $\hat{\eta} = \hat{\phi}/\tau$ eine ONB von $S_2(\phi)$ bildet.

(ii) Wie in Beispiel 3.16 und Bemerkung 3.17 bezeichne $N_2 = \chi_{[0,1)} * \chi_{[0,1)}$ den stückweise linearen B-Spline. Bestimmen Sie für $\phi = N_2$ ein trigonometrisches Polynom $\tau = a + be^{-2\pi i \cdot}$, das die Bedingungen aus (i) erfüllt. (Hinweis: Anwendung des Satzes von Riesz-Fejér)

(iii) Geben Sie die Koeffizienten in der Darstellung $\eta = c \,\tilde{*}\, \phi$ explizit an.

Aufgabe 20 Verfeinerbarkeit der Funktion η
Es sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ eine verfeinerbare Funktion und $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|\tau|^2 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion η wie in Aufgabe 19 verfeinerbar ist.

Aufgabe 21 Meyer-Wavelets
Es sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ definiert über die Fouriertransformierte

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \in [0, 1/3], \\ \sigma(|\omega|), & |\omega| \in (1/3, 2/3], \\ 0, & |\omega| \in [2/3, \infty), \end{cases}$$

wobei $\sigma(\omega) = \cos(\frac{\pi}{2}\beta(3\omega - 1))$ mit dem Polynom $\beta(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeichnen Sie ϕ und $\hat{\phi}$ mit Matlab.

(ii) Zeigen Sie, dass σ die Bedingung $\sigma^2(\omega) + \sigma^2(1 - \omega) \equiv 1$ für $\omega \in [1/3, 2/3]$ erfüllt und bestimmen Sie das maximale $r \in \mathbb{N}_0$, für welches $\hat{\phi} \in C^r(\mathbb{R})$ gilt.

(iii) Weisen Sie nach, dass $\Phi = \{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von $S_2(\phi)$ bildet.