

Wavelet-Analysis

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 02.12., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 22 Multiskalen-Analyse

Seien X_j und Y_j definiert durch

$$\begin{aligned} X_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(t) = 0 \text{ für fast alle } |t| \leq 2^{-j}\}, \\ Y_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für fast alle } |\omega| \leq 2^{-j}\}. \end{aligned}$$

Welche der Axiome einer MRA sind jeweils verletzt?

Aufgabe 23 Eigenschaften von Skalierungssymbol und Skalierungsmaske

Die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ sei die Skalierungsfunktion einer MRA mit dem Skalierungssymbol P_ϕ . Weiter sei $\hat{\phi}$ stetig an der Stelle $\omega = 0$ und $\hat{\phi}(0) \neq 0$. Beweisen Sie:

- a) P_ϕ ist stetig an der Stelle 0 und es gilt $P(0) = 1$.
b) Es gilt

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega) = |P_\phi(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + \left| P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right).$$

- c) Es gilt $P_\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, also erfüllt die Skalierungsmaske die sog. *Summenregel*

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}.$$

- d) Im Fall $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ gilt für die Skalierungsmaske

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+2\ell}} = 2\delta_{\ell,0}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 24 Wavelet-Mengen

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heisst *Wavelet-Menge*, wenn die Bedingungen

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (E + k) = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} 2^j E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

derart erfüllt sind, dass die Vereinigungen jeweils überlappungsfrei sind. Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine Wavelet-Menge ist:

$$E = \left[-\frac{16}{7}, -2\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right) \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[2, \frac{16}{7}\right).$$

Aufgabe 25 Zu Skalierungsfunktionen einer MSA

Es sei ϕ Skalierungsfunktion einer MSA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Beschreiben Sie alle Skalierungsfunktionen derselben MSA.