Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

01.12.2014

Wavelet-Analysis

8. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 09.12., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 26 Zum Skalenraum V_0
In Aufgabe 24 wurde ein Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\hat{\psi} = \chi_E$ zur Wavelet-Menge

$$E \;=\; \left[-\frac{16}{7}, -2\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right) \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[2, \frac{16}{7}\right)$$

konstruiert. Wie in Bezeichnung 4.19 definieren wir dann zu $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)$ die *Waveleträume*

$$W_j \;=\; \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\,\mathrm{span}\{\psi_{j,k} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

und darüber hinaus die *Skalenräume*

$$V_j \;=\; \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Geben Sie explizit den Raum V_0 an und weisen Sie nach, dass dieser keine Riesz-Basis der Form $\Phi = \{\phi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ besitzt.

Aufgabe 27 Orthonormalbasen aus Wavelet-Mengen
Es sei E eine Wavelet-Menge und $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\hat{\psi} = \chi_E$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Familie $\Psi_0 = \{\psi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB des Raumes $W_0 = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\,\mathrm{span}\,\Psi_0$.

(ii) Die zugehörigen Wavelet-Räume W_j, $j \in \mathbb{Z}$, sind paarweise orthogonal.

Aufgabe 28 Schranken von Spline-Wavelets
Es sei $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine MSA mit Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$ und zugehörigem Symbol P_ϕ.

(i) Zeigen Sie, dass die periodischen Funktionen $Q_1, Q_2 \in L^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} Q_1(\omega) &= e^{-2\pi i\omega}\overline{P_\phi(\omega + 1/2)}\,[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega + 1/2) \qquad \text{und} \\ Q_2(\omega) &= [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)^{-1} e^{-2\pi i\omega}\overline{P_\phi(\omega + 1/2)} \end{aligned}$$

die Identität (4.24) in Satz 4.26 erfüllen.

(ii) Weisen Sie die Darstellungen der Riesz-Schranken $\tilde{A}, \tilde{B}$ in (4.31) und (4.33) in Folgerung 4.29 nach.

Aufgabe 29 Orthogonale Wavelets
Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Satz 4.26 und $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 1$ die folgende Behauptung gilt: Q erzeugt genau dann eine ONB Ψ von $L^2(\mathbb{R})$, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} P(\omega) & P(\omega + 1/2) \\ Q(\omega) & Q(\omega + 1/2) \end{pmatrix}$$

für fast alle $\omega \in (0, 1)$ unitär ist.