Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Wintersemester 2014/15

08.12.2014

Wavelet-Analysis

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 16.12., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 30 Vom ψ zum ϕ
Zum MRA-Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist der Raum

$$V_0 = \bigoplus_{j=-\infty}^{-1} W_j$$

ein $\mathbb{Z}$-shift-invarianter Raum mit Riesz-Basis $\Phi = \{\phi(\cdot - k) \, : \, k \in \mathbb{Z}\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine 1-periodische Funktion τ mit $\hat{\psi}(4\omega) = \tau(\omega)\hat{\psi}(2\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Es existieren $Q \in L^2(0,1)$ und $A, B > 0$ derart, dass

$$A \leq \frac{1}{|Q(\omega)|^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\omega + 2k)|^2 \leq B.$$

(iii) Die Funktion η mit $\hat{\eta}(\omega) = \hat{\psi}(2\omega)/Q(\omega)$ ist verfeinerbar.

(iv) $\{\eta(\cdot - k) \, : \, k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Riesz-Basis von V_0.

Aufgabe 31 Down- und Upsampling im Zeitbereich...
Gegeben seien $D, U, S : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{aligned} D(x) &= (\ldots, x_{-4}, x_{-2}, \boxed{x_0}, x_2, x_4, \ldots) && \text{(“Downsampling”)} \\ U(x) &= (\ldots, 0, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, \boxed{x_0}, 0, x_1, 0, x_2, 0, \ldots) && \text{(“Upsampling”)} \\ S(x) &= (\ldots, \overline{x_2}, \overline{x_1}, \boxed{\overline{x_0}}, \overline{x_{-1}}, \overline{x_{-2}}, \ldots) && \text{(“Involution”)} \end{aligned}$$

für $x = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Dabei wird $\boxed{x_0}$ zur Kenntlichmachung des Elements zum Index 0 verwendet. Desweiteren definieren wir zu $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ den Operator

$$F_c : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad F_c(x) = c * x.$$

(i) Weisen Sie die folgenden Identitäten nach: $F_c^* = F_{S(c)}$, $D^* = U$ und $D \circ U = \mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $U \circ D$ Orthogonalprojektion von $\ell^2(\mathbb{Z})$ auf den Unterraum

$$\{x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \, : \, x_k = 0 \text{ für } k \in 2\mathbb{Z} + 1\}$$

ist.

(iii) Prüfen Sie, für welche $j \in \mathbb{Z}$ die Operatoren U bzw. D mit dem diskreten Shift-Operator $T_j : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ mit $T_j x = (\ldots, x_{-1-j}, \boxed{x_{-j}}, x_{1-j}, \ldots)$ kommutieren.

Aufgabe 32 ... und im Frequenzbereich
Zu $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ sei wie üblich die Fouriertransformierte $\hat{x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{2k\pi i \cdot}$ definiert. Weisen Sie die folgenden Identitäten für $\omega \in \mathbb{R}$ nach:

(i) $(Dx)\hat{}(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\frac{\omega}{2}) + \hat{x}(\frac{\omega+1}{2}))$,

(ii) $(Ux)\hat{}(\omega) = \hat{x}(2\omega)$,

(iii) $(Sx)\hat{}(\omega) = \overline{\hat{x}(\omega)}$,

(iv) $(F_c x)\hat{}(\omega) = \hat{c}(\omega)\hat{x}(\omega)$