

Wavelet-Analysis

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 6.1.2015, 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 33 (*verschwindende Momente*)

Es sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ eine verfeinerbare Funktion mit kompaktem Träger und endlicher Skalierungsmaske (p_k) . Weiter sei ψ ein zugehöriges MRA-Wavelet mit endlicher Wavelet-Maske (q_k) . Zeigen Sie:

- (i) Die Bedingung für L verschwindende Momente des Wavelets ψ ,

$$\int_{\mathbb{R}} t^r \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1,$$

ist äquivalent zu folgenden Bedingungen an die Skalierungs- bzw. Wavelet-Maske:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^r q_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k k^r p_k = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1,$$

- (ii) und weiterhin äquivalent zu

$$\frac{d^r}{d\omega^r} Q(0) = \frac{d^r}{d\omega^r} P(1/2) = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1.$$

Aufgabe 34 (*“Fast alle Werte von ϕ ...*)

Gegeben sei die Skalierungsmaske $p = \frac{1}{4}(\dots, 0, 1, 3, 3, 1, 0, \dots)$ (mit $p_0 = p_3 = 1$) des quadratischen B-Splines N_3 .

- (i) Verwenden Sie die Skalierungsgleichung von N_3 , um die Funktionswerte von N_3 in allen ganzen Zahlen $j \in \mathbb{Z}$ zu berechnen (Hinweis: der Eigenvektor einer geeigneten Matrix ist zu bestimmen).
- (ii) Berechnen Sie die Funktionswerte von N_3 in $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Z}/4$.

Aufgabe 35 (*interpolatorischer Kaskadenalgorithmus*)

Die Skalierungsmaske $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ habe endlichen Träger und erfülle die Beziehungen

$$p_0 = 1, \quad p_{2k} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1.$$

Weiterhin konvergiere der Kaskadenalgorithmus zur Startfunktion $\eta_0(x) = 1 - |x|$ für $|x| \leq 1$, $\eta_0(x) = 0$ für $|x| > 1$ (zentrierter linearer B-Spline) gegen die Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die Funktion η_j des Kaskadenalgorithmus bereits die Funktionswerte $\phi|_{2^{-j}\mathbb{Z}}$ der Skalierungsfunktion ϕ liefert.

Aufgabe 36 (*Transfer-Operatoren*)

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigen- bzw. verallgemeinerte Eigenfunktionen der eingeschränkten Transfer-Operatoren \tilde{T}_P und $\tilde{T}_{|P|^2}$ für

$$P(\omega) = \frac{1}{8}(1 + 3e^{i\omega} + 3e^{i2\omega} + e^{i3\omega}).$$