

## Wavelet-Analysis

### 12. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 20.1.2015, 12:00 Uhr  
Briefkasten 98

#### Aufgabe 40

Finden Sie alle Skalierungsmasken mit  $p_0, p_1, p_2 \neq 0$  und  $p_j = 0$  für  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$ , welche

$$\sum_{k=0}^2 p_k = 2$$

erfüllen und für die der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P|^2}$  die Eigenschaft

- in Satz 5.13(c) für die schwache Konvergenz des Kaskadenalgorithmus besitzt,
- in Satz 5.15(b) für die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus besitzt.

#### Aufgabe 41

- Es sei  $\omega \in (-1/2, 1/2) \setminus \{0\}$  so gegeben, dass  $\omega, 2\omega, \dots, 2^{l-1}\omega$  (mit  $l \in \mathbb{N}$ ) paarweise verschieden modulo  $\mathbb{Z}$  sind und  $\omega \equiv 2^l \omega \pmod{\mathbb{Z}}$  gilt. Beweisen Sie, dass ein  $0 \leq j \leq l-1$  existiert mit  $2^j \omega \in [1/3, 2/3] \pmod{\mathbb{Z}}$ .
- Zeigen Sie, dass für jedes trigonometrische Polynom  $P$  mit  $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1$  und  $P(\omega) \neq 0$  für  $\omega \in [-1/6, 1/6]$  Cohen's Bedingung gilt.

#### Aufgabe 42

Geben Sie eine Verallgemeinerung von Satz 5.24 auf den Fall an, dass das trigonometrische Polynom  $P$  anstatt der Bedingung (5.24) nur

$$|P(\omega)|^2 + |P(\omega + 1/2)|^2 \leq 1$$

erfüllt (mit Beweis). Was folgt für die Skalierungssymbole der B-Splines  $N_m$ ?

#### Aufgabe 43

Es sei  $P$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P(0) = 1$  und  $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + 1/2)|^2 = 1$ , die Funktion  $\phi$  sei wie in Satz 5.24 gegeben. Zeigen Sie die punktweise Relation

$$0 \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq 1, \quad \omega \in [0, 2\pi].$$