APPENDIX B

Das Spektrum des Transfer-Operators

Wir wollen mit einfachen Hilfsmitteln der Linearen Algebra weitere Aussagen zum Spektrum des Transfer-Operators herleiten. Dazu sei

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$$

mit $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$ gegeben (d.h. die Summenregeln sind erfüllt und wir arbeiten mit der Periodenlänge 2π anstatt 1). Also gilt

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} R(\omega), \qquad R(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2-1} r_k e^{-ik\omega}$$

mit einem trigonometrischen Polynom R. Wir verwenden noch die Bezeichnung

$$\mathcal{T}_{N_1,N_2} = \{f = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k e^{-ik\omega};\ a_k \in \mathbb{R}\}$$

für trigonometrische Polynome der entsprechenden Form. Nun ist es einfach nachzurechnen, dass der Transfer-Operator T_P definiert durch

$$T_P f(\omega) = P(\tfrac{\omega}{2}) f(\tfrac{\omega}{2}) + P(\tfrac{\omega}{2} + \pi) f(\tfrac{\omega}{2} + \pi)$$

den Raum $\mathcal{T}_{N_1,N_2}$ wieder in sich abbildet. Ebenso bildet natürlich T_R den Raum $\mathcal{T}_{N_1,N_2-1}$ in sich ab. Unser Ziel ist es nun, den engen Zusammenhang der Spektren von T_R und T_P zu erläutern. (Der Faktor $\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ spielt nämlich eine ganz wichtige Rolle!)

HILFSSATZ B.1. *Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von T_R und $f \in \mathcal{T}_{N_1,N_2-1}$ zugehörige (verallgemeinerte) Eigenfunktion ist, so ist $\mu = \frac{\lambda}{2}$ Eigenwert von T_P mit zugehöriger (verallgemeinerter) Eigenfunktion $g(\omega) = \frac{1-e^{-i\omega}}{2} f(\omega) \in \mathcal{T}_{N_1,N_2}$. Genauer: für $f \in \mathcal{T}_{N_1,N_2-1}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(\lambda I - T_R)^k f = 0 \implies \left(\frac{\lambda}{2} I - T_P\right)^k g = 0 \ \text{mit}\ g(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{2} f(\omega). \tag{B.1}$$

Beweis: Wir beginnen mit (richtigen) Eigenfunktionen, also dem Fall $k = 1$ in (B.1). Als wichtige Identität benutzen wir

$$\frac{1 + e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2} \frac{1 - e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2} = \frac{1 - e^{-i\omega}}{4}.$$

Einsetzen der Definition von g ergibt nach Ausklammern des gemeinsamen Faktors $\frac{1-e^{-i\omega}}{4}$

$$T_P g(\omega) = \frac{1-e^{-i\omega}}{4}\, T_R f(\omega) = \frac{\lambda}{2} g(\omega).$$

Also ist die Behauptung für alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von T_R gezeigt.

Aus der obigen Rechnung schließen wir sogar für jedes $f \in \mathcal{T}_{N_1,N_2-1}$ auf

$$\left(\frac{\lambda}{2} I - T_P\right)\left[\frac{1-e^{-i\cdot}}{2}\, f\right] = \frac{1-e^{-i\cdot}}{4} \cdot (\lambda I - T_R)[f].$$

Also erhalten wir

$$\left(\frac{\lambda}{2} I - T_P\right)^k \left[\frac{1-e^{-i\cdot}}{2}\, f\right] = \frac{1-e^{-i\cdot}}{2^{k+1}} \cdot (\lambda I - T_R)^k[f].$$

Damit ist die Behauptung in (B.1) gezeigt; d.h. auch verallgemeinerte Eigenfunktionen werden von T_R nach T_P mit dem Faktor $\frac{1-e^{-i\cdot}}{2}$ weitergegeben. □

Die Dimension von $\mathcal{T}_{N_1,N_2}$ ist $M := N_2 - N_1 + 1$. Hilfssatz B.1 liefert $M-1$ Eigenwerte und (verallgemeinerte) Eigenfunktionen von T_P. (Beachte: Falls $f_1, \ldots, f_{M-1}$ linear unabhängig sind, so sind auch die mit $\frac{1-e^{-i\cdot}}{2}$ multiplizierten Funktionen $g_1, \ldots, g_{M-1}$ linear unabhängig.) Die so erhaltenen (verallgemeinerten) Eigenfunktionen sind eine Basis des Teilraums

$$F_N := \{g \in \mathcal{T}_N; g(0) = 0\}.$$

Wir müssen also nur einen weiteren Eigenwert (mit Eigenfunktion oder verallgemeinerter Eigenfunktion) zusätzlich bestimmen.

Hilfssatz B.2. *T_P besitzt den Eigenwert 1. Ist $k \geq 0$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 2 von T_R, so ist $k+1$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von T_P. Weiterhin existiert eine (möglicherweise verallgemeinerte) Eigenfunktion f von T_P zum Eigenwert 1 mit $f(0) \neq 0$.*

Beweis: P erfüllt die Summenregeln $P(0) = 0$ und $P(\pi) = 0$. Die zugehörige Matrixdarstellung zur Basis $(e^{-iN_1\omega}, \ldots, e^{-iN_2\omega})$ hat die Form wie in (5.13). Falls $N_2 - N_1$ gerade ist, ergibt sich

$$\text{(B.2)} \qquad \mathcal{A}_P = \begin{pmatrix}
p_{N_1} &&&&&&& \\
p_{N_1+2} & p_{N_1+1} & p_{N_1} &&&&& \\
p_{N_1+4} & p_{N_1+3} & p_{N_1+2} & p_{N_1+1} &&&& \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &&&& \\
p_{N_2-2} & p_{N_2-3} & p_{N_2-4} & p_{N_2-5} & \cdots & p_{N_1} && \\
p_{N_2} & p_{N_2-1} & p_{N_2-2} & p_{N_2-3} & \cdots & p_{N_1+2} & p_{N_1+1} & p_{N_1} \\
&& p_{N_2} & p_{N_2-1} & \cdots & p_{N_1+4} & p_{N_1+3} & p_{N_1+2} \\
&&&&& \vdots & \vdots & \vdots \\
&&&&& p_{N_2} & p_{N_2-1} & p_{N_2-2} \\
&&&&&&& p_{N_2}
\end{pmatrix}$$

Im Fall $N_2 - N_1$ ungerade ist die Form ähnlich. In beiden Fällen sind die Spaltensummen alle gleich 1, also ist der Zeilenvektor $w = (1, 1, \ldots, 1)$ ein Links-Eigenvektor von $\mathcal{A}_P$ zum Eigenwert 1. Die in Hilfssatz B.1 gefundenen Eigenfunktionen von T_P haben die Form

$$g(\omega) = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k e^{-ik\omega} \text{ mit } g(0) = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k = 0.$$

Hierdurch sind $N_2 - N_1$ Rechts-Eigenvektoren (oder verallgemeinerte Eigenvektoren) $(a_{N_1}, \ldots, a_{N_2})^T$ von $\mathcal{A}_P$ gegeben, die orthogonal zum Linkseigenvektor w sind; sie bilden eine Basis des orthogonalen Komplements von w im Raum $\mathbb{R}^M$. Deshalb muss ein weiterer (möglicherweise verallgemeinerter) Rechts-Eigenvektor $v = (v_{N_1}, \ldots, v_{N_2})^T$ von $\mathcal{A}_P$ existieren mit

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k \neq 0$$

(sonst gäbe es keine Basis von Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren von $\mathcal{A}_P$). Würde dieser zusätzliche Vektor zu einem Eigenwert $\mu \neq 1$ von $\mathcal{A}_P$ gehören, so müsste er aber orthogonal zum Links-Eigenvektor w sein, Widerspruch. Also gehört der zusätzliche Rechts-Eigenvektor zum Eigenwert 1; die zugehörige Eigenfunktion $g = \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k e^{-ik\cdot}$ erfüllt $g(0) \neq 0$. Dadurch ist auch klar, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von $\mathcal{A}_P$ um eins größer ist als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 2 von $\mathcal{A}_R$. □

BEMERKUNG B.3. *Wir haben insgesamt gezeigt, dass das Spektrum $\sigma(T_P)$ gegeben ist durch*

$$\sigma(T_P) = \{\lambda/2; \lambda \in \sigma(T_R)\} \dot{\cup} \{1\},$$

wobei wir in dieser Schreibweise "geordnete" Mengen (unter Beibehaltung der Vielfachheit von Elementen) verwenden. Eine entsprechende Aussage liefert, dass die Multiplikation von R mit $\frac{1+e^{i\omega}}{2}$ zu dem gleichen Spektrum $\sigma(P)$ mit (verallgemeinerten) Eigenfunktionen $g(\omega) = \frac{1-e^{i\omega}}{2} f(\omega)$ führt.

Ist nun $R = |P_0|^2$ gegeben und multiplizieren wir nacheinander mit $\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ und $\frac{1+e^{i\omega}}{2}$, so erhalten wir die folgende Aussage für $P(\omega) = \frac{1+e^{i\omega}}{2} P_0(\omega)$:

Das Spektrum $\sigma(\tilde{T}_{|P|^2})$ des eingeschränkten Transfer-Operators ist gegeben durch

$$\sigma(\tilde{T}_{|P|^2}) = \{\lambda/4; \lambda \in \sigma(\tilde{T}_{|P_0|^2})\} \dot{\cup} \{1, 1/2\}.$$

Die zum vorderen Teil gehörenden (verallgemeinerten) Eigenfunktionen von $\tilde{T}_{|P|^2}$ ergeben sich als

$$g(\omega) = \frac{(1 - e^{-i\omega})(1 - e^{i\omega})}{4} f(\omega) = \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} f(\omega).$$

Alle diese Funktionen erfüllen die Bedingungen $g(0) = g'(0) = 0$. Zwei weitere (verallgemeinerte) Eigenfunktionen kommen hinzu, und zwar

- *eine Funktion g_1 mit $g_1(0) \neq 0$ zum Eigenwert 1,*
- *eine Funktion g_2 mit $g_2(0) = 0$, $g_2'(0) \neq 0$ zum Eigenwert 1/2.*

Falls diese Eigenwerte einfach sind (also in dem ersten Teil nicht vorkommen), sind die Funktionen g_1 *und* g_2 *sogar Eigenfunktionen. Die Funktion* g_1 *ist uns schon bekannt: es handelt sich um* $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$, *falls* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ *gilt.*

An den Beispielen und Übungen lassen sich diese Überlegungen sehr schön veranschaulichen. Dass tatsächlich verallgemeinerte Eigenfunktionen hinzutreten können, wird durch Beispiel 5.26 veranschaulicht (Schritt von P_2 nach P_1).