



## Skalierungsfunktionen und Wavelets mit kompaktem Träger

Skalierungs- und Waveletmasken mit wenigen von Null verschiedenen Koeffizienten führen zu besonders effizienten Algorithmen zur Berechnung der DWT. In Bemerkung 4.39 wurde erklärt, dass der numerische Aufwand zur Zerlegung (Algorithmus 4.38) und Rekonstruktion (Algorithmus 4.40) circa  $N \cdot M$  Operationen umfasst, wobei  $N$  die Länge des Eingangsvektors  $a_J$  und  $M$  die Länge der Masken  $p$  und  $q$  ist. Deshalb betrachten wir nun Skalierungsfunktionen  $\phi$ , deren Maske  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten besitzt,

$$p_k = 0 \quad \text{für} \quad k < N_1, \quad k > N_2,$$

für ganze Zahlen  $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$ . Das Skalierungssymbol ist also ein trigonometrisches Polynom

$$(5.1) \quad P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-2\pi i k \omega}.$$

Eine wichtige Aufgabe besteht darin, den Zusammenhang von  $P$  und  $\phi$  genauer darzustellen als im Abschnitt 4.1. Dies führt dann sogar zu einer Konstruktion neuer verfeinerbarer Funktionen, deren ganzzahlige Shifts eine Orthonormalbasis des Skalenraums  $V_0$  sind. Die zugehörigen Wavelets liest man ohne weitere Mühe ab: dies sind die Daubechies-Wavelets `daubN` in `matlab`.

### 1. Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger

Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger haben auch eine endliche Skalierungsmaske. Diese einfach aussehende Beziehung hat einen schwierigen Beweis und verwendet die Eigenschaft, dass die Shifts  $(\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$  eine Riesz-Basis bilden. Da wir das Resultat nicht für weitere Aussagen verwenden, verzichten wir auf den Beweis, den man in der Literatur findet.

**SATZ 5.1.** *Die Skalierungsfunktion  $\phi$  einer MRA habe kompakten Träger. Mit*

$$[a, b] = \text{conv}(\text{supp } \phi)$$

*bezeichnen wir die konvexe Hülle des Trägers von  $\phi$ , also das kleinste Intervall, das  $\text{supp } \phi$  enthält. Dann gilt  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p_k = 0$  für  $k < a$  und  $k > b$  sowie  $p_a p_b \neq 0$ .*

Wir wollen in diesem Abschnitt beschreiben, wie durch die Vorgabe des Skalierungssymbols  $P$  eine verfeinerbare Funktion  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  definiert werden kann und wie weitere

Eigenschaften von  $\phi$  in die Definition von  $P$  “eingebaut” werden können. Satz 5.1 gibt dazu an, dass die Länge  $N_2 - N_1 + 1$  der Maske  $(p_k)$  direkten Einfluss auf die Trägerlänge von  $\phi$  hat. Neben dieser fundamentalen Beziehung sollen weitere Eigenschaften analysiert werden. Zuerst steht der Funktionswert  $P(0)$  im Fokus, der durch Normalisierung als 0 oder 1 festgelegt werden kann.

SATZ 5.2. *Es sei*

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-2\pi i k \omega}$$

ein trigonometrisches Polynom und

$$(5.2) \quad \kappa(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

- a) *Im Fall  $P(0) = 0$  ist  $\kappa \equiv 0$  und das unendliche Produkt in (5.2) konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen Null.*  
 b) *Im Fall  $P(0) = 1$  ist  $\kappa$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\kappa(0) = 1$  und das unendliche Produkt konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen  $\kappa$ .*

**Beweis:**  $P$  ist differenzierbar. Im Fall  $P(0) = 0$  folgt aus dem Mittelwertsatz

$$|P(2^{-j}\omega)| \leq c2^{-j}|\omega|.$$

Hieraus folgt sofort die gleichmässige Konvergenz gegen 0 auf Kompakta. Im Fall  $P(0) = 1$  ist entsprechend

$$|1 - P(2^{-j}\omega)| = |P(0) - P(2^{-j}\omega)| \leq c2^{-j}|\omega| \leq c2^{-j}R$$

für  $|\omega| \leq R$ . Die absolute und gleichmässige Konvergenz des unendlichen Produkts für  $|\omega| \leq R$  folgt durch Logarithmieren sowie absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} |1 - P(2^{-j}\omega)|.$$

Stetigkeit des Grenzwerts  $\kappa$  folgt aus der Stetigkeit der endlichen Produkte zusammen mit der gleichmäßigen Konvergenz. Die Eigenschaft  $\kappa(0) = 1$  ist klar, sie liefert auch  $\kappa \neq 0$ .  $\square$

Den Zusammenhang der Skalierungsfunktion  $\phi$  zum unendlichen Produkt (5.2) haben wir schon in Bemerkung 4.10 aufgezeigt. Die Aussage in Satz 5.2 genügt aber noch nicht, um von einem gewählten trigonometrischen Polynom  $P$  (mit  $P(0) = 1$ ) auf die Skalierungsfunktion  $\phi$  zu kommen. Dazu müssen noch zwei Fragen beantwortet werden:

- (Q1) Wann liegt der Grenzwert  $\kappa$  in  $L^2(\mathbb{R})$ ? Dann ist die inverse Fourier-Transformierte  $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  (mit  $\hat{\phi} = \kappa$ ) eine verfeinerbare Funktion mit Skalierungssymbol  $P$ .  
 (Q2) Wann ist die Familie  $(\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$  eine Riesz-Basis? Dann ist  $\phi$  die Skalierungsfunktion einer MRA.

Die Untersuchung der endlichen Produkte führt nicht weiter. Das Produkt der ersten  $n$  Faktoren ist eine periodische Funktion der Periodenlänge  $2^n$ , also gar kein Element von  $L^2(\mathbb{R})$ . Stattdessen betrachten wir den sogenannten *Kaskadenalgorithmus*, der sowohl die Beantwortung obiger Fragen als auch eine Methode zur Konstruktion von  $\phi$  liefert. Der Algorithmus fällt unter die Kategorie von Fixpunkt-Iterationen. Hier wird eine Iteration in einer Teilmenge von  $L^2(\mathbb{R})$  durchgeführt, bei der jede Iterierte eine Funktion mit kompaktem Träger ist, und der Grenzwert ist die verfeinerbare Funktion  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ . Der Clou hieran ist, dass sich die Konvergenz des Kaskadenalgorithmus und die Eigenschaften des Grenzwerts  $\phi$  anhand der Eigenwerte einer einfachen Matrix ablesen lassen. Dies wird im Zusammenhang mit dem sogenannten *Transfer-Operator* deutlich.

### ALGORITHMUS 5.3. Kaskadenalgorithmus

Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega} \quad \text{mit} \quad P(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k = 1.$$

Weiter sei

$$(5.3) \quad \eta \in \mathcal{M} := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp } f \text{ kompakt, } \hat{f}(0) = 1\}$$

gegeben. Wir setzen  $\eta_0 := \eta$  und

$$(5.4) \quad \eta_{n+1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k \eta_n(2 \cdot -k), \quad n \geq 0,$$

oder äquivalent

$$(5.5) \quad \hat{\eta}_{n+1}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\eta}_n\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

**BEMERKUNG 5.4.** Zunächst sei angemerkt, dass alle Funktionen in  $\mathcal{M}$  stetige Fourier-Transformierte besitzen, weil  $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$  gilt. Weiter sieht man sofort, dass  $\eta_n \in \mathcal{M}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt. Denn  $\eta_{n+1}$  in (5.3) ist eine endliche Linearkombination von Funktionen mit kompaktem Träger, hat also selbst wieder kompakten Träger, und es gilt  $\hat{\eta}_{n+1}(0) = P(0)\hat{\eta}_n(0) = 1$ . Die Iterationsfolge ergibt sich also durch Anwendung der Potenzen des linearen Operators

$$\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad f \mapsto \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k f(2 \cdot -k),$$

auf die Startfunktion  $\eta_0$ . Falls die Folge  $(\eta_n)$  konvergiert, so ist der Grenzwert  $\phi$  ein Fixpunkt von  $\mathcal{R}$ , d.h.

$$\phi = \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k \phi(2 \cdot -k).$$

Mit anderen Worten: der Grenzwert  $\phi$  (falls existent) ist verfeinerbar, sein Skalierungssymbol ist das gegebene trigonometrische Polynom  $P$ .

**HILFSSATZ 5.5.** Es sei  $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P(0) = 1$ . Weiter sei  $\eta \in \mathcal{M}$ . Dann gilt für die Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  des Kaskadenalgorithmus:

a) Die Folge  $(\hat{\eta}_n)_{n \geq 0}$  konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  gegen die Funktion  $\kappa$  in (5.2), d.h.

$$(5.6) \quad \kappa(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\eta}_n(\omega).$$

b) Für jedes  $0 < \delta < 1/2$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$(5.7) \quad \text{supp } \eta_n \subset [N_1 - \delta, N_2 + \delta] \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Insbesondere ist das Klammerprodukt  $[\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n]$  ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $N = N_2 - N_1$  für alle  $n \geq n_0$ .

**Beweis:** a) Die Stetigkeit von  $\hat{\eta}$  bei  $\omega = 0$  ergibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\eta}(2^{-n}\omega) = 1$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Die rekursive Anwendung von (5.5) ergibt

$$(5.8) \quad \hat{\eta}_n(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega) \hat{\eta}(2^{-n}\omega),$$

und hieraus folgt die Behauptung.

b) Falls  $\text{supp } \eta \subset [a_0, b_0]$  mit  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  gilt, so ergibt (5.4)

$$\text{supp } \eta_n \subset [a_n, b_n] \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + N_1}{2}, \quad b_n = \frac{b_{n-1} + N_2}{2}.$$

Die rekursiv definierten Folgen  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $(b_n)_{n \geq 0}$  sind monoton und beschränkt. Z.B. ist  $(a_n)$  monoton steigend, falls  $a_0 < N_1$ , und monoton fallend, falls  $a_0 > N_1$ . Die Grenzwerte sind  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = N_1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = N_2$ . Dies liefert die Trägereigenschaft von  $\eta_n$ . Mit der Poissonschen Summenformel erhalten wir

$$[\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i m \omega} \int_{\mathbb{R}} \overline{\eta_n(t)} \eta_n(t + m) dt.$$

Die Trägereigenschaft für  $n \geq n_0$  liefert den Integralwert 0 für alle  $|m| > N$ .  $\square$

Uns interessiert nun die  $L^2$ -Konvergenz der Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$ . Die in Hilfssatz 5.5(a) erhaltene Aussage reicht zur  $L^2$ -Konvergenz nicht aus. In der Funktionalanalysis werden die folgenden beiden Konvergenztypen für eine Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  in  $L^2(\mathbb{R})$  unterschieden:

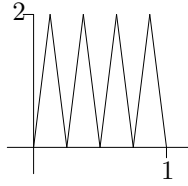
**Starke Konvergenz::**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \phi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$

**Schwache Konvergenz::**  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \phi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta_n - \phi, g \rangle = 0$  für alle  $g \in L^2(\mathbb{R}).$

Offensichtlich impliziert die starke Konvergenz die schwache Konvergenz. Dass beide Typen von Konvergenz verschieden sind, zeigt das folgende Beispiel.

BEISPIEL 5.6. Die Folge der "Zackenfunktionen"

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n(x - k/n) & \text{für } k/n \leq x \leq (k + 1/2)/n, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \\ 4n((k + 1)/n - x) & \text{für } (k + 1/2)/n < x \leq (k + 1)/n, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

BILD 5.1. Graph der Zackenfunktion  $f_4$ 

konvergiert schwach, aber nicht stark, gegen die charakteristische Funktion  $\chi_{[0,1]}$ . Der Graph von  $f_4$  ist in Abbildung 5.1 angegeben. Man rechnet leicht nach, dass  $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2/\sqrt{3}$  gilt. Wegen  $\|\chi_{[0,1]}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$  kann also die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  **nicht** in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm (also stark) gegen  $\chi_{[0,1]}$  konvergieren. Es liegt jedoch die schwache Konvergenz vor, denn:

1. Für stetig differenzierbares  $g$  ist

$$\langle f_n - \chi_{[0,1]}, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (f_n(x) - 1) \left( g(x) - g\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \right) dx,$$

weil  $\int_{k/n}^{(k+1)/n} (f_n(x) - 1) dx = 0$  gilt. Mit  $c = \max_{x \in [0,1]} |g'(x)|$  folgt

$$|\langle f_n - \chi_{[0,1]}, g \rangle| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{c}{2n} dx \leq \frac{c}{2n}.$$

Also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n - \chi_{[0,1]}, g \rangle = 0.$$

2. Für  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\epsilon > 0$  wähle

$$\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \|g - \tilde{g}\|_2 < \epsilon$$

sowie  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\langle f_n - \chi_{[0,1]}, \tilde{g} \rangle < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Dann ist

$$|\langle f_n - \chi_{[0,1]}, g \rangle| < (1 + \|f_n - \chi_{[0,1]}\|)\epsilon.$$

Die gleichmäßige Beschränktheit der Folge  $(f_n)$  ergibt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n - \chi_{[0,1]}, g \rangle = 0.$$

Dieser 2. Teil ist ein typisches "Dichtheitsargument".

Hilfreich ist die folgende Aussage zu beiden Typen der Konvergenz.

**HILFSSATZ 5.7.** Eine Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  mit  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$  für alle  $n \geq 0$  konvergiert genau dann in der  $L^2$ -Norm (also stark) gegen  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , wenn gilt

$$(5.9) \quad \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

**Beweis:** Aus der starken Konvergenz folgt die schwache Konvergenz und die Konvergenz der Norm in (5.9). Umgekehrt folgt aus den Bedingungen in (5.9)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle f_n, f \rangle) \\ &= 2\|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, f \rangle = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Die schwache Konvergenz reicht aus, um die Frage Q1 zu beantworten, ob das unendliche Produkt

$$(5.10) \quad \hat{\phi}(\omega) = \kappa(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega)$$

eine Funktion in  $L^2(\mathbb{R})$  ist, ob also dadurch die verfeinerbare Funktion  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  mit dem Skalierungssymbol  $P$  definiert ist.

**FOLGERUNG 5.8.** *Es sei  $P$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P(0) = 1$ . Falls der Kaskadenalgorithmus für mindestens eine Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}$  schwach gegen  $\phi$  konvergiert, so gilt:*

- (i)  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\operatorname{supp} \phi \subset [N_1, N_2]$ ,
- (ii)  $\phi$  ist verfeinerbar mit Skalierungssymbol  $P$ ,
- (iii)  $\hat{\phi} = \kappa$  in (5.10), insbesondere  $\hat{\phi}(0) = 1$ ,
- (iv) es gilt die punktweise Abschätzung

$$(5.11) \quad 0 \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega), \quad \omega \in [0, 1],$$

sowie  $\|\phi\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n\|_2$ .

**Beweis:** Der Begriff der schwachen Konvergenz beinhaltet, dass  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  gilt. Sei  $\delta > 0$  beliebig und  $h := \phi - \phi|_{[N_1 - \delta, N_2 + \delta]}$ . Wegen schwacher Konvergenz gegen  $\phi$  und der Trägereigenschaft von  $\eta_n$  in Hilfssatz 5.5 erhalten wir

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta_n - \phi, h \rangle = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta_n, h \rangle}_{=0} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi, h \rangle}_{=\|h\|_2^2} = -\|h\|^2.$$

Also ist  $h = 0$  f.ü., und es gilt  $\operatorname{supp} \phi \subset [N_1, N_2]$ . Damit ist die Eigenschaft (i) bewiesen.

Weiterhin konvergiert auch die Folge  $(\hat{\eta}_n)$  schwach gegen  $\hat{\phi}$  aufgrund der Plancherel Identität

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta_n - \phi, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{\eta}_n - \hat{\phi}, \hat{g} \rangle.$$

Der Grenzwert der Folge  $(\hat{\eta}_n)$  in Hilfssatz 5.5 ist also  $\hat{\phi}$ . Damit sind die Eigenschaften (ii) und (iii) bewiesen.

Mit der schwachen Konvergenz  $\eta_n \rightarrow \phi$  und der Poissonschen Summenformel folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n, \hat{\phi}](\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \eta_n, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-2\pi i k \omega} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-2\pi i k \omega} = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega).$$

Dabei wurde benutzt, dass die Funktionen  $\phi$  und  $\eta_n$  einen gleichmässig beschränkten Träger haben, die Summen also endliche Summen mit festem Indexbereich sind.

Mit ähnlicher Rechnung wie im Beweis von Hilfssatz 5.7 erhalten wir nun für jedes  $\omega \in [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n - \hat{\phi}, \hat{\eta}_n - \hat{\phi}](\omega) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) - 2 \operatorname{Re} [\hat{\eta}_n, \hat{\phi}](\omega) + [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) - [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega). \end{aligned}$$

Hieraus folgt (5.11) und mit Fatou's Lemma erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\phi\|_2^2 &= \int_0^1 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega \leq \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) d\omega \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) d\omega = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n\|_2^2. \quad \square \end{aligned}$$

Auch für den Kaskadenalgorithmus wollen wir zeigen, dass manchmal tatsächlich nur die schwache Konvergenz vorliegen kann.

BEISPIEL 5.9. *Wir betrachten die zwei Skalierungsmasken*

$$p_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \tilde{p}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörigen Skalierungssymbole sind

$$P(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i\omega}), \quad \tilde{P}(\omega) = P(2\omega).$$

Den Grenzwert des unendlichen Produkts für  $P$  in (5.5) haben wir bereits in Beispiel 4.11 gesehen,

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = 0, \\ \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} & \text{für } \omega \neq 0. \end{cases}$$

Der Grenzwert für  $\tilde{P}$  ist  $\hat{\tilde{\phi}} = \hat{\phi}(2\cdot)$ . Ihre inversen Fourier-Transformierten sind

$$\phi = \chi_{[0,1)}, \quad \tilde{\phi} = \frac{1}{2}\chi_{[0,2)}.$$

Beide Funktionen sind in  $L^2(\mathbb{R})$  (siehe Frage Q1) und jeweils verfeinerbar mit dem Skalierungssymbol  $P$  bzw.  $\tilde{P}$ .

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Kaskadenalgorithmen im Zeitbereich zu. Dazu wählen wir als Startfunktion den B-Spline  $N_2 \in \mathcal{M}$ , also

$$\eta_0(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einfache Überlegungen ergeben für die Iterierten  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  zur Skalierungsmaske  $(p_k)$

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 2^n x & \text{für } 0 \leq x \leq 2^{-n}, \\ 1 & \text{für } 2^{-n} < x \leq 1, \\ 1 - 2^n(x - 1) & \text{für } 1 < x \leq 1 + 2^{-n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$





BILD 5.2. Graphen der 3. Iterierten des Kaskadenalgorithmus mit den Skalierungsmasken  $p$  (links) und  $r$  (rechts)

Hieraus folgt sofort die starke Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi - \eta_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Für die Iterierten  $(\tilde{\eta}_n)_{n \geq 0}$  zur Skalierungsmaske  $(\tilde{p}_k)$  erhalten wir die “Zackenfunktion”

$$\tilde{\eta}_n(x) = \begin{cases} 2^n(x - 2^{-n+1}k) & \text{für } 2^{-n+1}k \leq x \leq 2^{-n+1}(k + 1/2), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \\ 2^n(2 - (x - 2^{-n+1}k)) & \text{für } 2^{-n+1}(k + 1/2) < x \leq 2^{-n+1}(k + 1), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Graphen von  $\eta_n$  und  $\tilde{\eta}_n$  für  $n = 3$  sind in Abbildung 5.2 angegeben. Wie in Beispiel 5.6 ist

$$\|\tilde{\eta}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\tilde{\eta}_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2/3} > \frac{1}{2} = \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Deshalb kann keine starke Konvergenz der Folge  $(\tilde{\eta}_n)$  gegen  $\tilde{\phi}$  vorliegen. Es liegt jedoch die schwache Konvergenz vor, wie in Beispiel 5.6 nachgewiesen wurde.

Wir wollen nun Kriterien an  $P$  formulieren, die die schwache und später die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für jede beliebige Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}$  garantieren. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff.

DEFINITION 5.10. Zu einem trigonometrischen Polynom  $R \in \mathcal{T}_N$  vom Grad  $N$ ,

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N r_k e^{-2\pi i k \omega},$$

definieren wir den Transfer-Operator

$$(5.12) \quad T_R : L^1(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1), \quad T_R \hat{h}(\omega) = R\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) + R\left(\frac{\omega}{2} + 1/2\right) \hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + 1/2\right).$$

Seine Einschränkung auf den Teilraum  $\mathcal{T}_N$  bezeichnen wir mit  $\tilde{T}_R = T_R|_{\mathcal{T}_N} : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$ .

Man beachte, dass der Raum  $\mathcal{T}_N$  tatsächlich ein invarianter Unterraum von  $T_R$  ist, dass also der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_R$  wohldefiniert ist. Dies erkennt man durch

$$R \in \mathcal{T}_N, \hat{h} \in \mathcal{T}_N \implies R \cdot \hat{h} \in \mathcal{T}_{2N} \implies T_R \hat{h} \in \mathcal{T}_N,$$

wobei im letzten Schritt die Halbierung des Arguments und Periodisierung zur Periodenlänge 1 schon aus der DWT bekannt ist, Stichwort Wavelet-Zerlegung.



Norm auf  $\mathcal{T}_N$  vorgeben, z.B. die  $L^1(0, 1)$ -Norm

$$\|\hat{h}\|_1 = \int_0^1 |\hat{h}(\omega)| d\omega.$$

Dann ist die Operatornorm von  $\tilde{T}_R$  gegeben durch

$$\|\tilde{T}_R\|_{\text{op}} = \max\{\|\tilde{T}_R \hat{h}\|_1 \mid \hat{h} \in \mathcal{T}_N, \|\hat{h}\|_1 = 1\}.$$

Für den Spektralradius gilt die Formel

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\tilde{T}_R^n\|_{\text{op}})^{1/n}.$$

Weiterhin ist bekannt, dass die Folge der Operatornormen  $(\|\tilde{T}_R^n\|_{\text{op}})_{n \geq 0}$  genau dann beschränkt ist, wenn die *Wurzelbedingung* gilt: der Spektralradius von  $\tilde{T}_R$  ist kleiner oder gleich 1 und alle Eigenwerte vom Betrag 1 sind nicht degeneriert. (Ansonsten würden Einträge in der Nebendiagonalen der Potenzen  $J^n$  in der Jordan-Normalform von  $\mathcal{A}_R$  unbeschränkte Folgen definieren, siehe auch von Mises-Verfahren in der Numerik I oder Stabilität von Differenzenverfahren in der Numerik II.)

BEISPIEL 5.11. Wir berechnen alle Eigenwerte und Eigen- bzw. verallgemeinerte Eigenfunktionen der eingeschränkten Transfer-Operatoren  $\tilde{T}_P$  (auf  $\mathcal{T}_1$ ) und  $\tilde{T}_{|P|^2}$  (auf  $\mathcal{T}_2$ ) für  $P(\omega) = \frac{1}{4}(2 + e^{2\pi i\omega} + e^{-2\pi i\omega})$ .

- $\tilde{T}_P : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$  hat die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{A}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

den einfachen Eigenwert 1 mit Eigenfunktion  $\hat{h}_1 \equiv 1$ ,  
den doppelten Eigenwert  $\frac{1}{2}$  mit Eigenfunktionen  $\hat{h}_2(\omega) = 1 - e^{2\pi i\omega}$  und  $\hat{h}_3(\omega) = 1 - e^{-2\pi i\omega}$ .

- $\tilde{T}_{|P|^2} : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$  hat die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{A}_{|P|^2} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

den einfachen Eigenwert 1 mit Eigenfunktion  $\hat{h}_1(\omega) = 4 + e^{2\pi i\omega} + e^{-2\pi i\omega}$ ,  
den einfachen Eigenwert  $\frac{1}{2}$  mit Eigenfunktion  $\hat{h}_2(\omega) = e^{2\pi i\omega} - e^{-2\pi i\omega}$ ,  
den einfachen Eigenwert  $\frac{1}{4}$  mit Eigenfunktion  $\hat{h}_3(\omega) = 2 - e^{2\pi i\omega} - e^{-2\pi i\omega}$ ,  
den doppelten Eigenwert  $\frac{1}{8}$  mit Eigenfunktionen  $\hat{h}_4(\omega) = e^{4\pi i\omega} - 3e^{2\pi i\omega} + 3 - e^{-2\pi i\omega}$ ,  $\hat{h}_5(\omega) = e^{-2\pi i\omega} \hat{h}_3(\omega)$ .

Man beachte, dass die Eigenfunktion zum Eigenwert 1 von  $T_{|P|^2}$  auch die Form

$$\hat{h}_1(\omega) = 6[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)$$

mit dem zentrierten linearen B-Spline  $\phi(x) = (1 - |x|)_+$  besitzt, den wir als Grenzwert des Kaskadenalgorithmus zum trigonometrischen Polynom  $P$  erhalten.

Die Beziehung des Transfer-Operators zum Kaskadenalgorithmus wird folgendermaßen klar.

**HILFSSATZ 5.12.** *Es seien  $P, \tilde{P}$  zwei trigonometrische Polynome mit  $P(0) = \tilde{P}(0) = 1$  sowie  $R = \overline{P\tilde{P}}$ . Weiter seien  $\eta, \tilde{\eta} \in \mathcal{M}$  und  $\eta_n, \tilde{\eta}_n$  die Iterierten des Kaskadenalgorithmus zum Skalierungssymbol  $P$  bzw.  $\tilde{P}$ . Dann gilt*

$$(5.14) \quad [\hat{\eta}_n, \hat{\tilde{\eta}}_n] = T_R^n([\hat{\eta}, \hat{\tilde{\eta}}]).$$

**Beweis:** Die Rechenregeln für das Klammerprodukt werden mit

$$\hat{\eta}_n(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\eta}_{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\tilde{\eta}}_n(\omega) = \tilde{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\eta}}_{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

angewendet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} [\hat{\eta}_n, \hat{\tilde{\eta}}_n](\omega) &= P\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)[\hat{\eta}_{n-1}, \hat{\tilde{\eta}}_{n-1}]\left(\frac{\omega}{2}\right)} + P\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)\overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)[\hat{\eta}_{n-1}, \hat{\tilde{\eta}}_{n-1}]\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= T_R([\hat{\eta}_{n-1}, \hat{\tilde{\eta}}_{n-1}])(\omega). \end{aligned}$$

Iteration dieser Beziehung ergibt die Behauptung.  $\square$

Mit dieser Aussage lässt sich nun die  $L^2$ -Norm der Iterierten  $\eta_n$  des Kaskadenalgorithmus untersuchen, denn nach Hilfssatz 5.12 gilt

$$(5.15) \quad \|\eta_n\|_2^2 = \int_0^1 [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) d\omega = \int_0^1 T_R^n([\hat{\eta}, \hat{\eta}])(\omega) d\omega, \quad R = |P|^2.$$

Die Beschränktheit der  $L^2$ -Norm steht in direktem Zusammenhang zum Spektrum von  $\tilde{T}_R$  und zur schwachen Konvergenz des Kaskadenalgorithmus.

**SATZ 5.13. (Schwache Konvergenz des Kaskadenalgorithmus)**

*Für ein trigonometrisches Polynom  $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$  mit  $P(0) = 1$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- Für alle  $\eta_0 \in \mathcal{M}$  ist die Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  des Kaskadenalgorithmus beschränkt in  $L^2(\mathbb{R})$ , d.h. es existiert  $B > 0$  mit  $\|\eta_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B$  für alle  $n \geq 0$ .*
- Die Funktion  $\hat{\phi}$  in (5.2) liegt in  $L^2(\mathbb{R})$  und für alle  $\eta_0 \in \mathcal{M}$  konvergiert die Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  des Kaskadenalgorithmus schwach gegen  $\phi$ .*
- Der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P|^2}$  erfüllt die Wurzelbedingung: Sein Spektralradius ist  $\rho = 1$ , alle Eigenwerte vom Betrag 1 sind nicht degeneriert.*

**Beweis:** a) $\implies$ b): Jede beschränkte Folge in  $L^2(\mathbb{R})$  besitzt eine Teilfolge, die schwach konvergiert. Als Grenzwert einer solchen Teilfolge von  $(\hat{\eta}_n)$  kann nur die Funktion  $\hat{\phi}$  auftreten, siehe Hilfssatz 5.5. Also ist  $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ . Außerdem gilt: Jede Teilfolge von  $(\hat{\eta}_n)_{n \geq 0}$  besitzt selbst wieder eine schwach gegen  $\hat{\phi}$  konvergente Teilfolge. Damit konvergiert die gesamte Folge  $(\hat{\eta}_n)_{n \geq 0}$  bereits gegen  $\hat{\phi}$ .

b) $\implies$ a): Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

a) $\implies$ c): Für jedes  $-N \leq k \leq N$  wählen wir die Startfunktion  $\eta^{(k)} = \chi_{[k, k+1)} \in \mathcal{M}$  für den Kaskadenalgorithmus mit dem Skalierungssymbol  $P$ . Die Iterationsfolgen bezeichnen wir mit  $(\eta_n^{(k)})_{n \geq 0}$ . Hilfssatz 5.12 ergibt mit  $R = |P|^2$

$$(5.16) \quad [\hat{\eta}_n^{(0)}, \hat{\eta}_n^{(k)}] = T_R^n([\hat{\eta}^{(0)}, \hat{\eta}^{(k)}]), \quad n \geq 0.$$

Für das Klammerprodukt folgt mit der Poissonschen Summenformel

$$[\hat{\eta}^{(0)}, \hat{\eta}^{(k)}](\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \eta^{(0)}(t) \eta^{(k)}(m+t) dt e^{-2\pi i m \omega} = e^{-2\pi i k \omega};$$

dies ist die Basisfunktion  $e_k = e^{-2\pi i k \cdot}$  von  $\mathcal{T}_N$ . Wir zeigen nun, dass die Potenzen  $\tilde{T}_R^n$  auf den Basisfunktionen beschränkt sind. Dazu verwenden wir die  $L^1(0, 1)$ -Norm auf  $\mathcal{T}_N$  und erhalten

$$\begin{aligned} \|T_R^n(e_k)\|_1 &= \int_0^1 |T_R^n([\hat{\eta}^{(0)}, \hat{\eta}^{(k)}])(\omega)| d\omega \\ &= \int_0^1 |[\hat{\eta}_n^{(0)}, \hat{\eta}_n^{(k)}](\omega)| d\omega \\ &\leq \int_0^1 \left([\hat{\eta}_n^{(0)}, \hat{\eta}_n^{(0)}](\omega)\right)^{1/2} \left([\hat{\eta}_n^{(k)}, \hat{\eta}_n^{(k)}](\omega)\right)^{1/2} d\omega \\ &\leq \left(\int_0^1 [\hat{\eta}_n^{(0)}, \hat{\eta}_n^{(0)}](\omega) d\omega\right)^{1/2} \left(\int_0^1 [\hat{\eta}_n^{(k)}, \hat{\eta}_n^{(k)}](\omega) d\omega\right)^{1/2} \\ &= \|\eta_n^{(0)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\eta_n^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung a) ist die rechte Seite beschränkt, und weil nur endlich viele  $k$  auftreten, existiert eine gleichmäßige obere Schranke  $B$ . Durch Betrachtung von Linearkombinationen erhält man, dass die Folge der Operatornormen  $\|\tilde{T}_R^n\|_{\text{op}}$  beschränkt ist. Also erfüllt der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_R$  die Wurzelbedingung. Dass der Spektralradius tatsächlich 1 ist und 1 sogar Eigenwert von  $\tilde{T}_R$  ist, wird separat formuliert in Folgerung 5.14. (Wir haben ja a)  $\implies$  b) schon gezeigt, dürfen an dieser Stelle also auf die Folgerung 5.8 zurückgreifen.)

c)  $\implies$  a): Nach Hilfssatz 5.5 existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $[\hat{\eta}_{n_0}, \hat{\eta}_{n_0}] \in \mathcal{T}_N$ . Wegen

$$\|\eta_n\|_2^2 = \int_0^1 [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) d\omega = \int_0^1 \tilde{T}_{|P|^2}^{n-n_0}([\hat{\eta}_{n_0}, \hat{\eta}_{n_0}])(\omega) d\omega$$

folgt die Beschränktheit der Normen  $(\|\eta_n\|)_{n \geq 0}$  aus der Wurzelbedingung an  $\tilde{T}_{|P|^2}$ .  $\square$

Mit Folgerung 5.8 folgt aus der schwachen Konvergenz, dass die Grenzfunktion  $\phi \neq 0$  kompakten Träger  $\text{supp } \phi \subset [N_1, N_2]$  besitzt und in  $\mathcal{M}$  liegt. Demnach ist  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \neq 0$  ein trigonometrisches Polynom in  $\mathcal{T}_N$ , wobei  $N = N_2 - N_1$  gesetzt wird.  $\phi$  selbst ist verfeinerbar, wird also durch Einsetzen in den Kaskadenalgorithmus reproduziert. Wir erhalten aus (5.14) die Identität

$$(5.17) \quad \tilde{T}_{|P|^2}([\hat{\phi}, \hat{\phi}]) = [\hat{\phi}, \hat{\phi}].$$

Dies ergibt die folgende Aussage.

**FOLGERUNG 5.14.** *Falls eine der äquivalenten Bedingungen in Satz 5.13 erfüllt ist, so ist  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$  eine Eigenfunktion des eingeschränkten Transfer-Operators  $\tilde{T}_{|P|^2}$  zum Eigenwert 1. Insbesondere ist der Spektralradius  $\rho = 1$  auch ein Eigenwert von  $\tilde{T}_{|P|^2}$ .*

Um die starke Konvergenz zu charakterisieren, schränken wir die Menge der Startfunktionen des Kaskade-Algorithmus weiter ein und setzen

(5.18)

$$\mathcal{M}_0 := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp } f \text{ kompakt, } \hat{f}(0) = 1, \hat{f}(k) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Die letzte Bedingung ist aufgrund der Poissonschen Summenformel äquivalent zu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\cdot - k) \equiv 1 \quad \text{f.ü.,}$$

also sind die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $f$  eine *Teilung der Eins*. Nun muss  $P$  die Bedingungen

$$(5.19) \quad P(0) = 1, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

also die Summenregeln

$$(5.20) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1$$

erfüllen, damit die Iterierten des Kaskadenalgorithmus in der Menge  $\mathcal{M}_0$  bleiben, falls die Startfunktion in  $\mathcal{M}_0$  gewählt wird. Dies ist mit (5.5) und

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{n+1}(2k) &= P(k)\hat{\eta}_n(k) = P(0)\hat{\eta}_n(k) = \delta_{k,0}, \\ \hat{\eta}_{n+1}(2k+1) &= P(k+\frac{1}{2})\hat{\eta}_n(k+\frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2})\hat{\eta}_n(k+\frac{1}{2}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

sofort einzusehen. Es gilt nun die folgende Charakterisierung der starken Konvergenz des Kaskadenalgorithmus.

**SATZ 5.15. (Starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus)** *Für ein trigonometrisches Polynom  $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$  mit  $P(0) = 1$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- Für alle  $\eta_0 \in \mathcal{M}_0$  konvergiert die Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  des Kaskadenalgorithmus stark gegen  $\phi$ .
- $P$  erfüllt die Summenregeln (5.19), also  $P(\frac{1}{2}) = 0$ , und der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P|^2}$  hat den einfachen Eigenwert 1 und alle anderen Eigenwerte sind vom Betrag kleiner als 1.

**Beweis:** a)  $\implies$  b): Wie im Beweisteil a)  $\implies$  c) von Satz 5.13 verwenden wir die Funktionen  $\eta^{(k)} = \chi_{[k, k+1)} \in \mathcal{M}_0$  als Startfunktionen des Kaskadenalgorithmus. Die Voraussetzung der starken Konvergenz  $\hat{\eta}_n^{(0)} \rightarrow \hat{\phi}$  und  $\hat{\eta}_n^{(k)} \rightarrow \hat{\phi}$  liefert in Analogie zu (5.16)

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\eta}_n^{(0)}, \hat{\eta}_n^{(k)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_R^n(e^{-ik}), \quad -N \leq k \leq N,$$

mit  $R = |P|^2$ . Durch Linearkombination folgt die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_R^n(\hat{h}) = \hat{h}(0)[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$$

für alle  $\hat{h} \in \mathcal{T}_N$ . Daraus folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Potenzen  $\tilde{T}_R^n$ , und das wiederum erfordert die Gültigkeit der Wurzelbedingung.

Die Konvergenz gegen ein Vielfaches der Eigenfunktion  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  zum Eigenwert 1 besagt, dass 1 ein einfacher Eigenwert sein muss und dass alle anderen Eigenwerte

vom Betrag kleiner als 1 sind. Damit sind alle Eigenschaften des Operators  $\tilde{T}_R$  gezeigt.

Um die Summenregel  $P(\frac{1}{2}) = 0$  zu zeigen, betrachten wir den adjungierten Operator  $\tilde{T}_R^* : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$ . (Eine explizite Angabe ist hier nicht erforderlich. Er ergibt sich durch Hintereinanderausführung von Upsampling, Faltung mit den Koeffizienten von  $|P|^2$  und anschließender Projektion in  $\mathcal{T}_N$ .) Die Matrixdarstellung ist die transponierte und komplex-konjugierte Matrix  $\mathcal{A}_R^*$ . Der adjungierte Operator  $\tilde{T}_R^*$  besitzt dieselben Eigenwerte wie  $\tilde{T}_R$  (mit gleicher Vielfachheit). Zum einfachen Eigenwert 1 gehört eine Eigenfunktion  $\hat{g}_1 \in \mathcal{T}_N$  mit

$$\langle \hat{g}_1, e^{-2\pi i k \cdot} \rangle_{L^2(0,1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\tilde{T}_R^*)^n \hat{g}_1, e^{-2\pi i k \cdot} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{g}_1, \tilde{T}_R^n(e^{-2\pi i k \cdot}) \rangle = \langle \hat{g}_1, \hat{h}_1 \rangle.$$

Also haben die Fourierkoeffizienten von  $\hat{g}_1$  alle denselben Wert,

$$\hat{g}_1 = \beta \sum_{k=-N}^N e^{-2\pi i k \cdot} \quad \text{mit } \beta \neq 0.$$

Der zugehörige Eigenvektor der Matrix  $\mathcal{A}_R^*$  ist  $\beta[1, \dots, 1]^T$ . Aufgrund der Form von  $\mathcal{A}_R$  in (5.13) erhalten wir daraus die Summenregeln

$$r_{-N} + r_{-N+2} + \dots + r_N = 1, \quad r_{-N+1} + r_{-N+3} + \dots + r_{N-1} = 1,$$

wobei  $R = |P|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N r_k e^{-2\pi i k \cdot}$  ist. Die Summenregeln für  $R$  sind äquivalent zu  $|P(0)|^2 = 1$  und  $|P(\frac{1}{2})|^2 = 0$ , also folgt  $P(\frac{1}{2}) = 0$ .

b) $\implies$ a): Nach Satz 5.13 wissen wir schon, dass  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  schwach gegen  $\phi$  konvergiert und  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  gilt. Wegen Lemma 5.7 genügt es also  $\|\eta_n\|_2 \rightarrow \|\phi\|_2$  zu zeigen. Hierzu beachten wir wieder die Gleichung

$$\|\hat{\eta}_n\|_2^2 = \int_0^1 \tilde{T}_R^n[\hat{\eta}, \hat{\eta}](\omega) d\omega.$$

Nach Hilfssatz 5.5(b) können wir o.B.d.A. annehmen, dass bereits  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}] \in \mathcal{T}_N$  gilt (sonst wird die Folge erst ab  $n_0$  betrachtet). Die Voraussetzung sichert, dass  $\lambda = 1$  dominanter und einfacher Eigenwert des Operators  $\tilde{T}_R$  ist. Als Eigenfunktion zum Eigenwert 1 haben wir in Folgerung 5.14 die Funktion  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  gefunden. Wie bei der Iteration beim Verfahren von von Mises (“Potenzmethode zur Eigenwertberechnung”) schreiben wir

$$(5.21) \quad [\hat{\eta}, \hat{\eta}] = c_1 \hat{h}_1 + \sum_{k=2}^{2N+1} c_k \hat{h}_k$$

als Linearkombination der Eigenfunktionen (und verallgemeinerten Eigenfunktionen) von  $\tilde{T}_R$ , die eine Basis von  $\mathcal{T}_N$  bilden. Die Potenzmethode (mit dominantem Eigenwert 1) ergibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_R^n([\hat{\eta}, \hat{\eta}]) = c_1 \hat{h}_1 = c_1 [\hat{\phi}, \hat{\phi}].$$

Weil  $\mathcal{T}_N$  endlich-dimensional ist, liegt hier Konvergenz bzgl. der Maximumnorm auf  $[0, 1]$ , also gleichmäßige Konvergenz auf  $[0, 1]$  vor. Damit ist bereits gezeigt, dass

$$(5.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{T}_R^n([\hat{\eta}, \hat{\eta}]) (\omega) d\omega = |c_1| \int_0^1 [\hat{\phi}, \hat{\phi}] (\omega) d\omega = |c_1| \|\phi\|_2^2$$

gilt. Es bleibt also zu zeigen, dass der Koeffizient  $c_1$  in der Darstellung von  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}]$  gleich 1 ist.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir nur die Stelle  $\omega = 0$ . Wegen  $\eta \in \mathcal{M}_0$  gilt

$$[\hat{\eta}, \hat{\eta}](0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\eta}(k)|^2 = 1.$$

Die Definition (5.2) von  $\hat{\phi}$  und Folgerung 5.8 ergeben zusammen mit den Voraussetzungen an  $P$  auch  $\phi \in \mathcal{M}_0$ , also  $\hat{h}_1(0) = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](0) = 1$ . Für alle weiteren Eigenfunktionen und verallgemeinerten Eigenfunktionen  $\hat{h}_k$ ,  $2 \leq k \leq 2N + 1$ , gilt mit einem  $\lambda \neq 1$  und  $\nu \in \mathbb{N}$

$$(\lambda I - \tilde{T}_R)^\nu(\hat{h}_k) \equiv 0.$$

Die Voraussetzung  $P(0) = 1$  und  $P(\frac{1}{2}) = 0$  liefert  $\tilde{T}_R^\mu \hat{h}(0) = \hat{h}(0)$  für alle  $\hat{h} \in \mathcal{T}_N$  und alle  $\mu \geq 0$ . Also erhalten wir

$$(\lambda - 1)^\nu \hat{h}_k(0) = 0, \quad 2 \leq k \leq 2N + 1,$$

und wegen  $\lambda \neq 1$  und  $\nu \in \mathbb{N}$  ergibt sich  $\hat{h}_k(0) = 0$ . Damit ist in der Darstellung (5.21) der Koeffizient  $c_1 = 1$ . Aus (5.22) folgt nun die starke Konvergenz der Folge  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  gegen  $\phi$ .  $\square$

BEISPIEL 5.16. *Wir greifen das Beispiel 5.9 wieder auf. Die Skalierungsmasken  $(p_k)$  und  $(\tilde{p}_k)$  ergeben*

$$|P(\omega)|^2 = \frac{1}{4}(2 + e^{2\pi i \omega} + e^{-2\pi i \omega}), \quad |\tilde{P}(\omega)|^2 = |P(2\omega)|^2.$$

Der eingeschränkte Transfer-Operator  $T_{|P|^2} : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$  besitzt zur Basis  $\mathcal{B}_1 = \{e^{-2\pi i \cdot}, 1, e^{2\pi i \cdot}\}$  die Matrixdarstellung

$$\mathcal{A}_{|P|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man die Eigenwerte 1 (einfach) und  $1/2$  (doppelt, nicht degeneriert). Also ist  $\rho(\tilde{T}_{|P|^2}) = \rho(\mathcal{A}_{|P|^2}) = 1$ . Der Eigenwert 1 ist einfach und einziger Eigenwert vom Betrag 1. Weiterhin gilt  $P(\frac{1}{2}) = 0$ , also sind die Bedingungen zur starken Konvergenz in Satz 5.15(b) erfüllt. Die Eigenfunktion  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$  zum Eigenwert 1 entspricht dem Eigenvektor  $(0, 1, 0)^T$  zur Matrixdarstellung  $\mathcal{A}_{|P|^2}$ . Man beachte noch, dass  $(1, 1, 1)$  ein Eigenvektor der adjungierten Matrix ist. Dies folgt ja aus den Summenregeln.

Für  $T_{|\tilde{P}|^2} : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$  erhalten wir zur Basis  $\mathcal{B}_2 = \{e^{-4\pi i \cdot}, e^{-2\pi i \cdot}, 1, e^{2\pi i \cdot}, e^{4\pi i \cdot}\}$  die Matrixdarstellung

$$\mathcal{A}_{|\tilde{P}|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Diese hat die Eigenwerte 1,  $1/2$  (doppelt) und 0 (doppelt), jeweils nicht degeneriert. Wieder ist  $\rho(\tilde{T}_{|\tilde{P}|^2}) = \rho(\mathcal{A}_{|\tilde{P}|^2}) = 1$ . Der Eigenwert 1 ist einfach und einziger Eigenwert vom Betrag 1. Weil aber  $\tilde{P}(\frac{1}{2}) = 1 \neq 0$  gilt, sind nur die Bedingungen zur



schwachen Konvergenz in Satz 5.15(b) erfüllt. Die Eigenfunktion zum Eigenwert 1 ist

$$[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}] = \frac{1}{4}(2 + e^{2\pi i\omega} + e^{-2\pi i\omega}),$$

siehe Folgerung 5.14. Ihr entspricht der Eigenvektor  $\frac{1}{4}(0, 1, 2, 1, 0)^T$  der Matrix  $\mathcal{A}_{|\widehat{P}|^2}$ .

ÜBUNG 5.17. Die Skalierungsmaske  $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit  $s_0 = s_3 = 1$  und  $s_k = 0$  sonst hat das Skalierungssymbol  $S(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-6\pi i\omega})$ . Als Grenzfunktion in (5.2) ergibt sich also

$$\theta(x) = \frac{1}{3}\chi_{[0,3)}(x).$$

Stellen Sie die Matrixdarstellung des eingeschränkten Transfer-Operators  $\tilde{T}_{|S|^2}$  auf dem Raum  $\mathcal{T}_3$  zur Standardbasis  $\mathcal{B}_3$  auf und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators. Welche der Bedingungen der starken bzw. schwachen Konvergenz des Kaskadenalgorithmus sind erfüllt?

Lösungsteil: Die Matrix lautet

$$\mathcal{A}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Eigenwerte 1 (doppelt),  $-1$ ,  $\frac{1}{2}$  (dreifach),  $-\frac{1}{2}$ . Keiner der Eigenwerte 1 und  $-1$  ist degeneriert: Zu  $\lambda = 1$  sind  $v_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$  und  $v_2 = (0, 1, 2, 3, 2, 1, 0)^T$  linear unabhängige Eigenvektoren. Also sind die Voraussetzungen für die schwache Konvergenz erfüllt. Der Grenzwert des Kaskadenalgorithmus zu jeder Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}$  ist

$$\theta = \frac{1}{3}\chi_{[0,3)};$$

dazu wird das unendliche Produkt

$$\kappa(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} S(2^{-j}\omega) = \frac{1 - e^{-6\pi i\omega}}{6\pi i\omega}$$

bestimmt und  $\hat{\theta} = \kappa$  gesetzt.

Zum Eigenvektor  $v_1$  gehört die Eigenfunktion  $\hat{h}_1 \equiv 1$  des Transfer-Operators, die die Beziehung  $|S(\omega)|^2 + |S(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1$  wie in (4.11) beschreibt. Zum Eigenvektor  $v_2$  gehört

$$\hat{h}_2(\omega) = 9[\hat{\theta}, \hat{\theta}](\omega) = 3 + 2(e^{2\pi i\omega} + e^{-2\pi i\omega}) + e^{4\pi i\omega} + e^{-4\pi i\omega},$$

vergleiche Folgerung 5.14. Man beachte, dass die  $\mathbb{Z}$ -Shifts der Funktion  $\theta$  keine Riesz-Basis bilden, weil  $[\hat{\theta}, \hat{\theta}]$  Nullstellen bei  $1/3$  und  $2/3$  besitzt.

Die Voraussetzungen für die starke Konvergenz sind verletzt: Es gilt zwar  $S(\frac{1}{2}) = 0$  (Summenregel), aber die strikte Dominanz und Einfachheit des Eigenwerts  $\lambda = 1$  sind verletzt.

ÜBUNG 5.18. Auch wenn die Voraussetzungen in Satz 5.15 verletzt sind, kann bei bestimmter Wahl der Startfunktion trotzdem starke Konvergenz gegen  $\phi$  eintreten.

Man betrachte die folgende Situation. Die Voraussetzungen für die schwache Konvergenz seien erfüllt, also insbesondere ist das unendliche Produkt  $\hat{\phi} = \kappa \in L^2(\mathbb{R})$  stetig und es gilt  $\hat{\phi}(0) = 1$ . Dann können wir ein  $\delta > 0$  mit  $|\hat{\phi}(\omega)| > \frac{1}{2}$  für alle

$\omega \in [-\delta, \delta] =: E_\delta$  wählen. Zeigen Sie, dass für die Startfunktion  $\eta$  mit  $\hat{\eta} = \chi_{E_\delta}$  die starke Konvergenz  $\eta_n \rightarrow \phi$  eintritt. (Hinweis: Punktweise Konvergenz von  $\hat{\eta}_n - \hat{\phi}$  gegen 0 ist gegeben. Man bestimme zusätzlich eine integrierbare Majorante für  $|\hat{\eta}_n - \hat{\phi}|^2$ .)

Lösung: Für alle  $\omega \in 2^n E_\delta$  gilt

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega)\hat{\phi}(2^{-n}\omega),$$

also mit der Wahl von  $\delta$

$$\left| \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega) \right| \leq 2|\hat{\phi}(\omega)|.$$

Weiterhin ist für alle  $\omega \in 2^n E_\delta$

$$\hat{\eta}_n(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega)\hat{\eta}(2^{-n}\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega).$$

Wegen  $\hat{\eta}_n(\omega) = 0$  für alle  $\omega \notin 2^n E_\delta$  erhalten wir die Majorante

$$|\hat{\eta}_n(\omega)| \leq 2|\hat{\phi}(\omega)|, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0.$$

Damit hat  $|\hat{\eta}_n - \hat{\phi}|^2$  die integrierbare Majorante  $9|\hat{\phi}|^2$ . Aus der punktweisen Konvergenz des Integranden gegen Null folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\eta}_n - \hat{\phi}|^2 = 0.$$

**BEMERKUNG 5.19.** Der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_R$  mit  $R = |P|^2$  hat die folgende offensichtliche Eigenschaft:

$\tilde{T}_R$  ist ein positiver Operator; d.h. für alle nichtnegativen trigonometrischen Polynome  $\hat{h} \in \mathcal{T}_N$  ist auch  $T_R \hat{h}$  nichtnegativ.

Diese Eigenschaft wird in der Linearen Algebra im Umgang mit Matrizen behandelt, deren Einträge alle nichtnegativ sind, z.B. bei stochastischen Matrizen (siehe Markov-Ketten). Rheinboldt und Vandergraft<sup>1</sup> formulieren in ihrer sehr schönen Arbeit die wesentlichen Aussagen für positive Operatoren auf endlich-dimensionalen Vektorräumen. Die folgenden Eigenschaften<sup>2</sup> positiver Operatoren  $T : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$  sind bedeutend für unsere Untersuchungen der Funktion  $\phi$ .

- (i) Der Spektralradius  $\rho(T)$  ist ein Eigenwert und es gibt eine nichtnegative Eigenfunktion  $\hat{h} \geq 0$  zu diesem Eigenwert.
- (ii) Falls  $T$  positiv und primitiv ist, so ist  $\rho(T)$  der einzige Eigenwert mit diesem Betrag, er ist einfach und die zugehörige Eigenfunktion ist strikt positiv.

Hierbei wird der folgende Begriff verwendet:

Ein positiver Operator  $T : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$  heißt primitiv, wenn es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt mit  $T^k \hat{h} > 0$  für alle  $\hat{h} \geq 0$ .

<sup>1</sup>W. C. Rheinboldt, J. S. Vandergraft, "A simple approach to the Perron-Frobenius theory for positive operators on general partially-ordered finite-dimensional linear spaces", Math. Comp. 27 (1973), 139–145

<sup>2</sup>Beweise findet man in R. A. Horn und C. R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press 1985, Kapitel 8

Die Eigenschaft (i) haben wir in den Beispielen bereits beobachtet: Falls  $T_R$  die Wurzelbedingung erfüllt, liegt jeweils der Eigenwert  $\rho(\tilde{T}_R) = 1$  vor und  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \geq 0$  ist eine zugehörige Eigenfunktion. Die Eigenschaft (ii) wäre sehr bedeutsam für die starke Konvergenz. Darüberhinaus würde sie sogar feststellen, dass die Eigenfunktion  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  strikt positiv ist. Damit wäre dann klar, dass die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi$  eine Riesz-Basis bilden, weil aufgrund der Stetigkeit also Konstanten  $A, B > 0$  existieren mit

$$A \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq B \quad \text{für alle } \omega \in [0, 1].$$

Diese Konstanten sind die Riesz-Schranken der Familie  $(\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ . Leider ist aber der Operator  $\tilde{T}_R$  nicht primitiv. Vielmehr ergibt sich direkt aus der Summenregel  $P(\frac{1}{2}) = 0$ , dass für jede Funktion  $\hat{h} \in \mathcal{T}_N$  mit  $\hat{h}(0) = 0$  auch  $T_R^n \hat{h}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Dennoch geben die Untersuchungen der Primitivität positiver Operatoren einige Anhaltspunkte, wie die strikte Positivität der Eigenfunktion  $\hat{h}_1$  charakterisiert werden kann.

**SATZ 5.20. Cohen's Bedingung**

Es sei

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-2\pi i k \omega}$$

mit  $P_0(0) = 1, P_0(\frac{1}{2}) = 0$  gegeben. Weiterhin konvergiere der Kaskadenalgorithmus für alle  $\eta_0 \in \mathcal{M}_0$  schwach gegen  $\phi$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $\phi$  ist Skalierungsfunktion einer MRA; d.h. die Familie  $(\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$  ist eine Riesz-Basis.
- b)  $P$  erfüllt "Cohen's Bedingung":
  - (i)  $P$  besitzt keine "symmetrischen" Nullstellenpaare  $(\omega, \omega + \frac{1}{2})$ . (Diese Bezeichnung wird wegen der Lage von  $e^{2\pi i \omega}$  und  $e^{2\pi i(\omega + \frac{1}{2})}$  auf dem Einheitskreis gewählt.)
  - (ii) Es existiert kein Zyklus

$$(5.23) \quad \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{\ell-1} \in (0, 1)$$

der Länge  $\ell \geq 2$ , so dass

$$(5.24) \quad P(2^k \omega_0 + \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq \ell - 1$$

gilt.

Dabei heißt die Sequenz (5.23) ein Zyklus der Länge  $\ell$ , wenn gilt:

- die Zahlen  $\omega_0, \dots, \omega_{\ell-1} \in (0, 1)$  sind paarweise verschieden,
- $\omega_k \equiv 2\omega_{k-1} \pmod{\mathbb{Z}}$  für  $1 \leq k \leq \ell - 1$ ,
- $2^\ell \omega_0 \equiv \omega_0 \pmod{\mathbb{Z}}$  (dies schließt den Zyklus).

**Beweis:** Wir setzen  $R = |P|^2$ . Die obere Riesz-Schranke  $B$  liegt vor, weil  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$  ein trigonometrisches Polynom ist. Die untere Riesz-Schranke  $A > 0$  liegt genau dann vor, wenn  $\hat{h}_1$  keine Nullstelle hat. Aufgrund der schwachen Konvergenz ist  $\hat{h}_1$  eine Eigenfunktion von  $T_R$  zum Eigenwert 1. Wir zeigen:

1. Cohen's Bedingung ist notwendig für die Existenz der unteren Riesz-Schranke:

- (i) Ein symmetrisches Nullstellenpaar
- $(\omega_0, \omega_0 + \frac{1}{2})$
- von
- $P$
- bewirkt, dass

$$T_R \hat{h}(2\omega_0) = \underbrace{R(\omega_0)}_{=0} \hat{h}(\omega_0) + \underbrace{R(\omega_0 + \frac{1}{2})}_{=0} \hat{h}(\omega_0 + \frac{1}{2}) = 0$$

für jedes  $\hat{h} \in \mathcal{T}_N$  gilt, also hat die Eigenfunktion  $\hat{h}_1$  diese Nullstelle  $2\omega_0$ .

- (ii) Es sei
- $\omega_0, \dots, \omega_{\ell-1} \in (0, 1)$
- ein Zyklus der Länge
- $\ell \geq 2$
- mit
- $P(\omega_k + \frac{1}{2}) = 0$
- für
- $0 \leq k \leq \ell - 1$
- . Wir betrachten alle
- $\hat{h} \in \mathcal{T}_N \setminus \{0\}$
- ,
- $\hat{h} \geq 0$
- mit

$$\hat{h}(\omega_k) = 0 \quad \text{für } 0 \leq k \leq \ell - 1.$$

Solche  $\hat{h}$  existieren, z.B.  $\hat{h} = R(\cdot + \frac{1}{2})$ . Wir zeigen, dass diese Nullstellen auch bei  $T_R \hat{h}$  und damit auch bei allen Potenzen  $T_R^n \hat{h}$  auftreten. Wegen der Periodenlänge 1 können wir statt  $\omega_k \in (0, 1)$  auch die Werte  $\xi_k = 2^k \omega_0$  für den Nachweis verwenden. Für  $1 \leq k \leq \ell - 1$  haben wir

$$T_R \hat{h}(\xi_k) = R(\xi_{k-1}) \underbrace{\hat{h}(\xi_{k-1})}_{=0} + R(\xi_{k-1} + \frac{1}{2}) \underbrace{\hat{h}(\xi_{k-1} + \frac{1}{2})}_{=0} = 0.$$

Für  $k = 0$  verwenden wir die Zyklus-Eigenschaft  $2^\ell \omega_0 - \omega_0 \in \mathbb{Z}$ , erhalten also

$$T_R \hat{h}(\omega_0) = T_R \hat{h}(2^\ell \omega_0) = R(\xi_{\ell-1}) \underbrace{\hat{h}(\xi_{\ell-1})}_{=0} + R(\xi_{\ell-1} + \frac{1}{2}) \underbrace{\hat{h}(\xi_{\ell-1} + \frac{1}{2})}_{=0} = 0.$$

Wenn wir nun eine Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}_0$  finden, für die  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}](\omega_k) = 0$ ,  $0 \leq k \leq \ell - 1$ , gilt, so ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auch

$$[\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega_k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\eta}_n(\omega_k + j)|^2 = 0,$$

also  $\hat{\eta}_n(\omega_k + j) = 0$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$ . Die punktweise Konvergenz von  $\hat{\eta}_n$  gegen  $\hat{\phi}$  ergibt

$$\hat{\phi}(\omega_k + j) = 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq \ell - 1,$$

und damit  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega_k) = 0$ .

Zur Angabe einer solchen Startfunktion definieren wir

$$\theta_k(x) = ce^{2\pi i x \omega_k} (\chi_{(0,1)} - \chi_{(-1,0)}), \quad c = -\frac{\pi i \omega_k}{1 - \cos(2\pi \omega_k)},$$

mit den Werten der Fouriertransformierten

$$\hat{\theta}_k(0) = 1, \quad \hat{\theta}_k(\omega_k + n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mit dem Faltungssatz erkennt man, dass

$$\eta = \chi_{(0,1)} * \theta_0 * \dots * \theta_{\ell-1}$$

sowohl  $\hat{\eta}(n) = \delta_{0,n}$  für  $n \in \mathbb{Z}$  als auch

$$[\hat{\eta}, \hat{\eta}](\omega_k) = 0, \quad 0 \leq k \leq \ell - 1,$$

erfüllt. Damit ist die Notwendigkeit von Cohen's Bedingung bewiesen.

2. Cohen's Bedingung ist hinreichend für die Existenz der unteren Riesz-Schranke:

$P$  besitze beide Eigenschaften (i) und (ii), das gleiche gilt dann für  $R = |P|^2$ . Die schwache Konvergenz liefert bereits  $\phi \in \mathcal{M}_0$ , also ist  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](0) = 1$ . Als Eigenfunktion zum Eigenwert 1 erfüllt  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  die Identität

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = T_R([\hat{\phi}, \hat{\phi}])(\omega) = R\left(\frac{\omega}{2}\right)[\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + R\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)[\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Wir führen nun die Annahme  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\xi_0) = 0$  mit  $\xi_0 \in (0, 1)$  zum Widerspruch zu (ii) in Cohen's Bedingung. Aus  $R \geq 0$  und Eigenschaft (i) folgt, dass

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\xi_0 + 1}{2}\right) = 0.$$

Wir nennen die vorliegende Nullstelle  $\xi_1$  (bei zwei Nullstellen wählen wir die kleinere) und erhalten damit

$$\xi_1 \in (0, 1), \quad \xi_1 \neq \xi_0, \quad 2\xi_1 - \xi_0 \in \mathbb{Z}, \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\xi_1) = 0.$$

Nun fahren wir mit  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\xi_1) = 0$  fort und erhalten so eine Folge von Zahlen

$$\xi_k \in (0, 1), \quad \xi_k \neq \xi_{k-1}, \quad 2\xi_k - \xi_{k-1} \in \mathbb{Z}, \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\xi_k) = 0$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Man beachte, dass hierbei auch  $2^m \xi_{k+m} - \xi_k \in \mathbb{Z}$  gilt (etwa durch Schreiben der Differenz als Teleskopsumme). Die Folge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  besteht aus Nullstellen des trigonometrischen Polynoms  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$ , das höchstens  $2N$  paarweise verschiedene Nullstellen in  $(0, 1)$  besitzt. Also muss ein Teilstück

$$\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+\ell-1}$$

aus paarweise verschiedenen Nullstellen in  $(0, 1)$  existieren, so dass  $\xi_k = \xi_{k+\ell}$  gilt. Wir können sogar das Anfangsstück der Folge nehmen, denn

$$\xi_0 - \xi_\ell = (2^\ell \xi_{k+\ell} - \xi_\ell) - (2^\ell \xi_k - \xi_0) \in \mathbb{Z}$$

impliziert  $\xi_0 = \xi_\ell$ . Wir haben damit gezeigt, dass die Folge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  periodisch ist, also die Form

$$\xi_0, \dots, \xi_{\ell-1}, \xi_0, \dots, \xi_{\ell-1}, \dots$$

aufweist. Wegen  $\xi_1 \neq \xi_0$  ist die Periodenlänge  $\ell \geq 2$ . Setzen wir  $\omega_j = \xi_{\ell-j}$ , so ist die Sequenz

$$\{\omega_0, \dots, \omega_{\ell-1}\} \subset (0, 1)$$

ein Zyklus im Sinne der Definition in (ii). Zusammenfassend halten wir fest, dass **alle** Nullstellen von  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  zu einem oder mehreren Zyklen gehören. Man macht sich leicht klar:

- verschiedene Zyklen sind disjunkt,
- falls  $\omega$  in einem Zyklus liegt, dann gehört  $\omega \pm \frac{1}{2}$  zu keinem Zyklus; denn die "Nachfolger" von  $\omega$  und  $\omega \pm \frac{1}{2}$  wären ja gleich, ein Widerspruch zur Disjunktheit.

Ist nun  $\omega_k$  eine Nullstelle von  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  in einem solchen Zyklus, so erhalten wir

$$0 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega_k) = R(\omega_k) \underbrace{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega_k)}_{=0} + R\left(\omega_k + \frac{1}{2}\right) \underbrace{[\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega_k + \frac{1}{2}\right)}_{\neq 0}.$$

Deshalb muss  $R(\omega_k + \frac{1}{2}) = |P(\omega_k + \frac{1}{2})|^2 = 0$  gelten. Also ist die Eigenschaft (ii) in Cohen's Bedingung verletzt.  $\square$

Zwei Ergänzungen sind hier angebracht. Zunächst haben wir in Bemerkung 5.19 festgestellt, dass der Transfer-Operator  $T_R$  nicht primitiv ist, wenn  $P$  die Summenregel  $P(\frac{1}{2}) = 0$  erfüllt. In diesem Fall gilt die Faktorisierung

$$P(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^m P_0(\omega),$$

wobei  $m \in \mathbb{N}$  die Ordnung der Nullstelle  $\frac{1}{2}$  ist und  $P_0$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P_0(0) = 1$ ,  $P_0(\frac{1}{2}) \neq 0$  ist. Mit einem ähnlichen Beweis wie zuvor kann folgendes Resultat gezeigt werden.

**KOROLLAR 5.21.** *Für ein trigonometrisches Polynom  $P \in \mathcal{T}_N$  mit  $P(0) = 1$  und  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- a) *Der Transfer-Operator  $T_{|P|^2}$  ist primitiv.*
- b)  *$P$  erfüllt Cohen's Bedingung.*

Weiterhin kann gezeigt werden, dass die starke Konvergenz in Satz 5.15 aus der Kombination

schwache Konvergenz + Summenregel + Cohen's Bedingung

folgt. Dies erleichtert einerseits die Überprüfung der starken Konvergenz und zeigt andererseits, dass die starke Konvergenz notwendig, aber nicht hinreichend dafür ist, dass die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi$  eine Riesz-Basis bilden.

**SATZ 5.22.** *Es sei  $P$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P(0) = 1$ ,  $P(\frac{1}{2}) = 0$  und der Kaskadenalgorithmus konvergiere für jedes  $\eta \in \mathcal{M}$  schwach gegen  $\phi$ .*

*Falls  $P$  Cohen's Bedingung erfüllt, so konvergiert der Kaskadenalgorithmus für jede Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}_0$  stark gegen  $\phi$ .*

**Beweis:** (in der Vorlesung auslassen)

Da  $P$  die Summenregeln erfüllt, genügt es zu zeigen, dass der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P|^2}$  die Spektraleigenschaften in Satz 5.15(b) hat. Aus der schwachen Konvergenz folgt bereits, dass der Spektralradius  $\rho = 1$  ist. Wegen  $P(\frac{1}{2}) = 0$  gibt es ein trigonometrisches Polynom  $P_0$  mit

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} P_0(\omega).$$

Es sei  $\Lambda_0$  die (geordnete) Menge der (mit Vielfachheiten gezählten) Eigenwerte des eingeschränkten Transfer-Operators  $\tilde{T}_{|P_0|^2}$  und  $\tau$  sein Spektralradius. Dann sind die Eigenwerte von  $\tilde{T}_{|P|^2}$  nach der Bemerkung B.3 im Anhang gegeben durch

$$\Lambda = \{\lambda/4; \lambda \in \Lambda_0\} \dot{\cup} \{1, 1/2\}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass  $\tau/4 < 1$  gilt. Wäre  $\tau/4 = 1$ , so würde nach Bemerkung ?? eine nichtnegative Eigenfunktion  $\hat{f} \in \mathcal{T}_{N-1}$  von  $\tilde{T}_{|P_0|^2}$  zum Eigenwert  $\tau = 4$  existieren. Diese liefert dann die Eigenfunktion

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} \hat{f}(\omega) \geq 0$$

zum Eigenwert 1 des Operators  $\tilde{T}_{|P|^2}$ . Die Funktion  $\hat{h}_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  ist ebenfalls eine Eigenfunktion zum Eigenwert 1, sie ist strikt positiv nach Satz 5.20. Wir definieren

$$c := \min_{\omega \in (0,1)} \frac{\hat{h}_1(\omega)}{\hat{g}(\omega)} > 0$$

und

$$\hat{h} := \hat{h}_1 - c\hat{g} \geq 0.$$

$\hat{h}$  ist eine weitere nichtnegative Eigenfunktion zum Eigenwert 1 und erfüllt  $\hat{h}(0) = 1$ . Die Wahl von  $c$  liefert eine Nullstelle  $h(\xi_0) = 0$  im offenen Intervall  $(0, 1)$ . Mit dem gleichen Argument wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 5.20 liefert diese Nullstelle einen Widerspruch zur Eigenschaft (ii) in Cohen's Bedingung.

Also muss  $\tau/4 < 1$  gelten. Damit ist nachgewiesen, dass 1 einfacher Eigenwert von  $\tilde{T}_{|P|^2}$  ist und alle anderen Eigenwerte vom Betrag kleiner als 1 sind.  $\square$

BEISPIEL 5.23. *Wir betrachten ein zur Übung 5.17 passendes Beispiel*

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\pi i\omega})(1 + e^{-6\pi i\omega}).$$

$\tilde{S}$  erfüllt die Summenregeln  $\tilde{S}(0) = 1$  sowie  $\tilde{S}(\frac{1}{2}) = 0$ . Die Untersuchung der Eigenwerte von  $\tilde{T}_{|\tilde{S}|^2}$  zeigt, dass der Kaskadenalgorithmus für jedes  $\eta \in \mathcal{M}_0$  stark gegen die Funktion

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{3}\chi_{(0,1)} * \chi_{(0,3)} = \begin{cases} x/3, & 0 \leq x < 1, \\ 1/3, & 1 \leq x < 3, \\ 4 - x, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

konvergiert. Sie kann mit dem linearen B-Spline geschrieben werden als

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{3}(N_2(x) + N_2(x - 1) + N_2(x - 2)),$$

ihr Klammerprodukt lautet

$$[\hat{\theta}, \hat{\theta}](\omega) = \frac{1}{9} |1 + e^{-2\pi i\omega} + e^{-4\pi i\omega}|^2 [\hat{N}_2, \hat{N}_2](\omega)$$

und besitzt die Nullstellen  $1/3$  und  $2/3$ . Die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\tilde{\theta}$  bilden also keine Riesz-Basis.

Zur Überprüfung von Cohen's Bedingung betrachten wir die Nullstellen

$$\tilde{S}\left(\frac{1}{6}\right) = \tilde{S}\left(\frac{5}{6}\right) = 0.$$

Die gegenüberliegenden Punkte

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

bilden den Zyklus  $\omega_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\omega_1 = \frac{2}{3}$  der Länge 2, denn  $2\omega_0 = \omega_1$  und  $2\omega_1 \equiv \omega_0 \pmod{\mathbb{Z}}$ . Also verletzt  $\tilde{S}$  Cohen's Bedingung, in Übereinstimmung mit der Existenz der beiden Nullstellen von  $[\hat{\theta}, \hat{\theta}]$ .

Das Spektrum des Operators  $\tilde{T}_{|P|^2}$  verrät sogar noch mehr über die Funktion  $\phi$ . Wir wissen bereits, dass die Differenzierbarkeit von  $\phi$  (mit  $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$ ) ein gewisses Abklingverhalten der Fourier-Transformierten  $\hat{\phi}$  bewirkt. Als "Glattheitsräume" werden häufig die Sobolev-Räume

$$H_2^\alpha(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^2)^\alpha |f(\omega)|^2 d\omega < \infty\}, \quad \alpha > 0,$$

verwendet. Typische sogenannte “Einbettungssätze” der Form

$$H_2^{r+1/2+\epsilon}(\mathbb{R}) \subset C^r(\mathbb{R})$$

liefern einen Zusammenhang zur üblichen Differenzierbarkeit von Funktionen. Wir bezeichnen den Wert

$$\beta = \beta(\phi) = \sup\{\alpha \geq 0; \phi \in H_2^\alpha(\mathbb{R})\}$$

als den *Sobolev-Exponenten* der Funktion  $\phi$ . Dieser läßt sich genau bestimmen! Ohne Beweis zitieren wir die folgende Aussage von T. Eirola<sup>3</sup>.

SATZ 5.24. *Gegeben sei das trigonometrische Polynom*

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-2\pi i k \omega} = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^m P_0(\omega),$$

wobei  $m \in \mathbb{N}$  und  $P_0$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P_0(0) = 1$ ,  $P_0(\frac{1}{2}) \neq 0$  ist. Ist  $\tau$  der Spektralradius von  $\tilde{T}_{|P_0|^2}$  und  $\tau < 4^m$ , so konvergiert der Kaskadenalgorithmus für jede Startfunktion  $\eta \in \mathcal{M}_0$  stark gegen  $\phi$  und es gilt

$$\beta(\phi) \geq m - \log_4 \tau.$$

Falls  $P$  Cohen's Bedingung erfüllt, gilt sogar Gleichheit und  $\phi \notin H_2^{\beta(\phi)}$ .

## 2. Orthogonale Skalierungsfunktionen

Die Shifts  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$  einer Skalierungsfunktion bilden genau dann eine Orthonormalbasis (von  $V_0$ ), wenn  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$  gilt. In Folgerung 4.7 haben wir bereits die notwendige Eigenschaft

$$(5.25) \quad |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1$$

des Skalierungssymbols bewiesen. Im jetzigen Zusammenhang kann diese Eigenschaft von  $P$  neu interpretiert werden: der Transfer-Operator  $T_{|P|^2}$  besitzt die Eigenfunktion  $\hat{h}_1 \equiv 1$  zum Eigenwert 1. Nebenbei sei bemerkt, dass  $P$  mit  $P(0) = 1$  und der Eigenschaft (5.25) automatisch die Summenregel  $P(\frac{1}{2}) = 0$  erfüllt.

Das Beispiel der Übungsaufgabe 5.17 zeigt jedoch, dass die Eigenschaft (5.25) nicht hinreichend ist für die Orthogonalität der  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi$ . Der Operator  $T_{|P|^2}$  kann die Funktion  $\hat{h}_2 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$  als weitere Eigenfunktion zum Eigenwert 1 besitzen. Diese Eigenfunktion kann sogar Nullstellen haben, auf Grund dessen die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi$  dann keine Riesz-Basis bilden. Die Bedingung (5.25) dient aber dennoch zur Vereinfachung der Aussagen der Konvergenzsätze im vorherigen Abschnitt.

SATZ 5.25. *Das trigonometrische Polynom  $P$  erfülle  $P(0) = 1$  und die Bedingung (5.25).*

---

<sup>3</sup>Timo Eirola, Sobolev characterization of solutions of dilation equations, Siam J. Math. Anal. **23** (1992), 1015–1030



a) Dann liegt die Funktion  $\phi$  mit

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega)$$

in  $L^2(\mathbb{R})$ , der Kaskadenalgorithmus konvergiert schwach für alle Startfunktionen  $\eta \in \mathcal{M}$  gegen  $\phi$  und es gilt  $0 \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$ .

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $P$  erfüllt Cohen's Bedingung.
- (ii) Der Kaskadenalgorithmus konvergiert stark für alle Startfunktionen  $\eta \in \mathcal{M}_0$  gegen  $\phi$ .
- (iii) Die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi$  bilden ein ONS, es gilt also  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ .
- (iv) Es gilt  $\|\phi\|_2 = 1$ .

**Beweis:** a) Für  $\eta \in \mathcal{M}$  ist  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}]$  ein trigonometrisches Polynom. Setzen wir  $B := \max_{\omega} [\hat{\eta}, \hat{\eta}](\omega)$ , so ergibt (5.14) und die Bedingung (5.25)

$$0 \leq [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) \leq B.$$

Hieraus folgt

$$\|\eta_n\|_2^2 = \int_0^1 [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n](\omega) d\omega \leq B,$$

und mit Satz 5.13(b) folgt  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  sowie die schwache Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für alle  $\eta \in \mathcal{M}$ . Wählen wir die Startfunktion  $\eta = \chi_{[0,1]}$  mit orthogonalen  $\mathbb{Z}$ -Shifts, so ist  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}] \equiv 1$ , und die Gleichungen (5.14) und (5.25) ergeben

$$(5.26) \quad [\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_n] = T_{|P|^2}^n([\hat{\eta}, \hat{\eta}]) \equiv 1.$$

Hieraus folgt die Beziehung  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$ , siehe (iv) in Folgerung 5.8.

b) Die Folgerung (i) $\Rightarrow$ (ii) steht in Satz 5.22. Weiterhin folgt aus (ii), dass  $\hat{h} \equiv 1$  die einzige Eigenfunktion von  $\tilde{T}_{|P|^2}$  mit dem Funktionswert  $\hat{h}(0) = 1$  ist. Also gilt  $\hat{h} = [\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 1$  und damit auch (iii). Dass aus (iii) Cohen's Bedingung folgt, wurde in Satz 5.20 bewiesen. Damit ist die Äquivalenz der ersten drei Aussagen in b) bewiesen.

Die Äquivalenz von (iii) und (iv) ergibt sich aus a), denn mit  $0 \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$  gilt

$$\|\phi\|_2 = \int_0^1 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega = 1 \iff [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1. \quad \square$$

**BEISPIEL 5.26.** Wir betrachten das Skalierungssymbol der Daubechies-Skalierungsfunktion  $\phi_2$  (für ein Wavelet  $\psi_2$  mit  $m = 2$  verschwindenden Momenten)

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{8}((1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})e^{-2\pi i\omega} + (3 - \sqrt{3})e^{-4\pi i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-6\pi i\omega}) \\ &= \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{8} \left( (1 + \sqrt{3}) + 2e^{-2\pi i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-4\pi i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{2} \right)^2 \left( (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-2\pi i\omega} \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten neben  $P$  auch die Teilsymbole

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= \frac{1}{4} \left( (1 + \sqrt{3}) + 2e^{-2\pi i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-4\pi i\omega} \right), \\ P_2(\omega) &= \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-2\pi i\omega} \right). \end{aligned}$$

- $P$  erfüllt (5.25): mit  $(1+e^{-2\pi i\omega}) = 2e^{-i\pi\omega} \cos \pi\omega$  und  $(1-e^{-2\pi i\omega}) = 2ie^{-i\pi\omega} \sin \pi\omega$  erhalten wir aus der letzten Form von  $P(\omega)$

$$\begin{aligned} &|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \frac{1}{2})|^2 \\ &= \cos^4 \pi\omega |\cos \pi\omega + i\sqrt{3} \sin \pi\omega|^2 + \sin^4 \pi\omega |-\sin \pi\omega + i\sqrt{3} \cos \pi\omega|^2 \\ &= \cos^4 \pi\omega (\cos^2 \pi\omega + 3 \sin^2 \pi\omega) + \sin^4 \pi\omega (\sin^2 \pi\omega + 3 \cos^2 \pi\omega) \\ &= (\cos^2 \pi\omega + \sin^2 \pi\omega)^3 = 1. \end{aligned}$$

- $P_2$  erfüllt Cohen's Bedingung und  $P_2(\frac{1}{2}) \neq 0$ , also ist der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P_2|^2}$  primitiv. Seine Eigenwerte sind 4 (einfach) mit der strikt positiven Eigenfunktion  $f_1 \equiv 1$  sowie  $-1$  (doppelt, nicht entartet). Der Kaskadenalgorithmus zu  $P_2$  konvergiert weder schwach noch stark, weil der Spektralradius größer als 1 ist.
- Der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P_1|^2}$  hat die Eigenwerte 1 (doppelt und entartet) mit nur einer Eigenfunktion

$$(2 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}) f_1 = 2 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}.$$

Die weiteren Eigenwerte sind  $1/2$  (einfach) und  $-1/4$  (doppelt, nicht entartet). Der Kaskadenalgorithmus konvergiert nicht schwach.

Dass der doppelte Eigenwert 1 entartet ist, sieht man auch so: Weil  $P_1$  Cohen's Bedingung und  $P_1(\frac{1}{2}) = 0$  erfüllt, sind starke und schwache Konvergenz des Kaskadenalgorithmus nach Folgerung 5.22 gleichbedeutend. Weil 1 doppelter Eigenwert ist, kann keine starke Konvergenz vorliegen, also auch keine schwache Konvergenz. Damit ist das Wurzelkriterium verletzt.

- $P$  erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.25 und Cohen's Bedingung. Also konvergiert der Kaskadenalgorithmus für alle  $\eta \in \mathcal{M}_0$  stark gegen  $\phi_2$  und die  $\mathbb{Z}$ -Shifts von  $\phi_2$  sind ein ONS.

Tatsächlich hat der eingeschränkte Transfer-Operator  $\tilde{T}_{|P|^2}$  auf  $\mathcal{T}_3$  die Eigenwerte 1 (einfach) mit Eigenfunktion  $h_1 \equiv 1$ ,  $1/2$  (einfach),  $1/4$  (doppelt und entartet),  $1/8$  und  $-1/16$  (doppelt, nicht entartet). Die starke Wurzelbedingung in Satz 5.15(b) ist automatisch erfüllt.

Das obige Beispiel stammt aus der Klasse der orthogonalen Skalierungsfunktionen von Ingrid Daubechies. Das Kernstück ist dabei die Konstruktion von Skalierungssymbolen

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k e^{-2\pi i k \omega} = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^m P_0(\omega),$$

mit der Orthogonalitätsrelation (5.25). Hierbei gibt  $m \in \mathbb{N}$  die Ordnung der Nullstelle  $\omega = \frac{1}{2}$  von  $P$  an und  $P_0$  ist ein trigonometrisches Polynom mit  $P_0(0) = 1$ ,  $P_0(\frac{1}{2}) \neq 0$ .

BEMERKUNG 5.27. Die Summenregel (5.19) ist für jedes  $m \geq 1$  erfüllt. Weiterhin steht  $m$  im Zusammenhang mit der Glattheitsordnung der verfeinerbaren Funktion  $\phi$  wie in Satz 5.24. Am wichtigsten ist aber die Bedeutung des Parameters  $m$  zur Bestimmung der Anzahl der verschwindenden Momente eines zugehörigen Wavelets, vgl. hierzu eine Übungsaufgabe zu MRA-Wavelets (Nr. 33 im WS 2014).

Es stellt sich heraus, dass  $N = 2m - 1$  der kleinstmögliche Grad eines Skalierungssymbols  $P$  ist, das sowohl die Nullstellenordnung  $m$  an der Stelle  $\frac{1}{2}$  besitzt als auch die Orthogonalitätsrelation (5.25) erfüllt. Das trigonometrische Polynom  $R = |P|^2$  mit diesem Grad wird nun angegeben.

HILFSSATZ 5.28. Das trigonometrische Polynom  $R \in \mathcal{T}_{2m-1}$  mit

$$(5.27) \quad R(\omega) = \left( \frac{2 + e^{-2\pi i \omega} + e^{2\pi i \omega}}{4} \right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} \left( \frac{2 - e^{-2\pi i \omega} - e^{2\pi i \omega}}{4} \right)^k$$

erfüllt  $R \geq 0$ ,  $R(0) = 1$  und  $R(\omega) + R(\omega + \frac{1}{2}) = 1$  für alle  $\omega \in [0, 1)$ .

**Beweis:** Zur Vereinfachung setzen wir

$$\begin{aligned} x &= \sin^2(\pi\omega) = \left| \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2} \right|^2 = \frac{2 - e^{-2\pi i \omega} - e^{2\pi i \omega}}{4}, \\ 1 - x &= \cos^2(\pi\omega) = \left| \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right|^2 = \frac{2 + e^{-2\pi i \omega} + e^{2\pi i \omega}}{4}. \end{aligned}$$

Also ist

$$R(\omega) = (1 - x)^m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} x^k =: q(x).$$

Wegen  $x \in [0, 1]$  erhält man  $R \geq 0$ . Weiterhin sind abzulesen  $R(0) = q(0) = 1$  und  $R(\frac{1}{2}) = q(1) = 0$  sowie

$$R(\omega + \frac{1}{2}) = x^m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^k = q(1-x).$$

Das Polynom  $q$  vom Grad  $2m - 1$  ist ein Grundpolynom zur Hermite-Interpolation der Funktionswerte und ersten  $m - 1$  Ableitungen an den Stellen 0 und 1: Leicht zu berechnen ist  $q^{(\nu)}(1) = 0$  für alle  $0 \leq \nu \leq m - 1$ . An der Stelle  $x = 0$  liefert die Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} q^{(\nu)}(0) &= \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} (-1)^{\nu-j} \frac{m!}{(m-\nu+j)!} \frac{(m-1+j)!}{(m-1)!} \\ &= (-1)^{\nu} \nu! \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{m}{\nu-j} \binom{m-1+j}{j} \\ &= (-1)^{\nu} \nu! \sum_{j=0}^{\nu} \binom{m}{\nu-j} \binom{-m}{j} = 0 \end{aligned}$$

für  $1 \leq \nu \leq m - 1$ . Das Hermite-Interpolationspolynom zur konstanten Funktion 1 hat also die Form

$$1 = p_{2m-1}(x) = q(x) + q(1-x).$$

Dies ist die gewünschte Identität für  $R$ .  $\square$

Der nächste Schritt besteht in der Ermittlung des trigonometrischen Polynoms  $P$  aus der angegebenen Funktion  $R = |P|^2$ . Weil  $R$  ein nichtnegatives Cosinus-Polynom ist ( $R$  reell,  $R \geq 0$  und alle Koeffizienten von  $R$  sind reell), dient hierzu das Riesz-Fejér Lemma<sup>4</sup>.

HILFSSATZ 5.29. (*Lemma von Riesz und Fejér*)

Gegeben sei das trigonometrische Polynom

$$A(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos 2\pi k\omega \geq 0$$

mit reellen Koeffizienten  $a_0, \dots, a_N$  und  $a_N \neq 0$ . Dann existiert ein trigonometrisches Polynom  $B(\omega) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-2\pi i k\omega}$  mit reellen Koeffizienten  $b_0, \dots, b_N$ , das

$$|B(\omega)|^2 = A(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

**Beweis.** Wir bestimmen  $B$  nach der Methode der "spektralen Faktorisierung". Zum trigonometrischen Polynom  $A(\omega)$  definieren wir das algebraische Polynom

$$a(z) := \frac{z^N}{2} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N a_k (z^k + z^{-k}) \right).$$

Für  $z = e^{-2\pi i\omega}$  ist dann  $A(\omega) = z^{-N} a(z)$ . Wegen  $a_N \neq 0$  ist  $z = 0$  keine Nullstelle von  $a$ . Weil  $a$  reelle Koeffizienten besitzt und  $a(z) = a(1/z)$  erfüllt, gilt: Mit  $z$  sind auch  $\bar{z}$ ,  $1/z$  und  $1/\bar{z}$  Nullstellen von  $a$  (wobei manche dieser Werte zusammenfallen können). Wegen  $z^{-N} a(z) \geq 0$  für alle  $|z| = 1$  ist die Ordnung aller Nullstellen  $z$  auf dem Einheitskreis jeweils gerade. Also hat  $a$  die Gestalt

$$\begin{aligned} a(z) &= \alpha (z-1)^{2n_1} (z+1)^{2n_2} \prod_{k=1}^{n_3} (z-r_k)(1-zr_k) \\ &\quad \prod_{k=1}^{n_4} (z-e^{i\theta_k})^{2\alpha_k} (z-e^{-i\theta_k})^{2\alpha_k} \prod_{k=1}^{n_5} (z-z_k)(z-\bar{z}_k)(1-zz_k)(1-z\bar{z}_k), \end{aligned}$$

wobei  $r_k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ,  $\theta_k \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ ,  $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  mit  $|z_k| \neq 1$  Nullstellen von  $a$  sind und der Koeffizient  $\alpha$  reell ist. Wir können nun ein Polynom  $b$  vom Grad  $N$  durch Auswahl der Hälfte der Nullstellen von  $a$  so bestimmen, dass  $b$  reelle Koeffizienten hat und  $z^N b(z)b(1/z) = a(z)$  erfüllt. Dazu setzen wir

$$b(z) = \gamma (z-1)^{n_1} (z+1)^{n_2} \prod_{k=1}^{n_3} (z-r_k) \prod_{k=1}^{n_4} (z-e^{i\theta_k})^{\alpha_k} (z-e^{-i\theta_k})^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{n_5} (z-z_k)(z-\bar{z}_k)$$

mit geeignetem  $\gamma \in \mathbb{R}$  und beachten, dass nicht-reelle Nullstellen in Paaren konjugiert komplexer Nullstellen auftreten. Die Monom-Darstellung  $b(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$  mit reellen Koeffizienten liefert schließlich das gesuchte trigonometrische Polynom  $B(\omega) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-ik\omega}$ , denn mit  $z = e^{-2\pi i\omega}$  gilt

$$|B(\omega)|^2 = b(z)b(1/z) = z^{-N} a(z) = A(\omega). \quad \square$$

<sup>4</sup>siehe z.B. Polya, Szegő, Lehrbuch der Analysis 2, S. 82, Aufgabe 41

BEMERKUNG 5.30. Die Auswahl der Nullstellen zur Definition von  $b$  im obigen Beweis ist nicht eindeutig. Manchmal wählt man den “minimal-phasigen” Filter, indem alle reellen und komplexen Nullstellen außerhalb des Einheitskreises verwendet werden. Dies war der ursprüngliche Vorschlag von Daubechies und führt von dem trigonometrischen Polynom  $R = R_L$  aus Hilfssatz 5.28 zu den Daubechies-Filtern (in Matlab durch `dbL` bezeichnet). Nachträglich wurden andere Kombinationen der Nullstellen ausgewählt, die zu “symmetrischeren” Koeffizientenfolgen  $b_k$  führen. Ausgehend von derselben Funktion  $R_L$  erhält man so die “Symmlet-Filter” (in Matlab durch `symL` bezeichnet).

BEISPIEL 5.31. Wir führen die Schritte für  $m = 2$  aus. Die Funktion  $R = R_2$  in Hilfssatz 5.28 ist

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \left( \frac{2 + e^{-2\pi i\omega} + e^{2\pi i\omega}}{4} \right)^2 \left( 1 + \frac{2 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}}{2} \right) \\ &= \left| \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{2} \right|^4 \frac{4 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}}{2}. \end{aligned}$$

Wir verwenden das Riesz-Fejér Lemma nur für den letzten Bruch. Das quadratische Polynom  $a(z) = (4z - 1 - z^2)/2$  hat die Nullstellen  $r_1 = 2 - \sqrt{3}$  und  $r_1^{-1} = 2 + \sqrt{3}$ . Der minimal-phasige Faktor ist

$$b(z) = \gamma(z - (2 + \sqrt{3})), \quad \gamma = -\sqrt{1 - \sqrt{3}/2} = (1 - \sqrt{3})/2.$$

Als Skalierungssymbol ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \left( \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{2} \right)^2 \left( \frac{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-2\pi i\omega}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( (1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z + (3 - \sqrt{3})z^2 + (1 - \sqrt{3})z^3 \right). \end{aligned}$$

Die Konvergenzeigenschaften des Kaskadenalgorithmus wurden schon in Beispiel 5.26 ausgeführt. Die resultierende Funktion  $\phi$  hat orthogonale  $\mathbb{Z}$ -Shifts.

Die Untersuchung der Konvergenz der Daubechies- (und Symmlet-) Filter stützt sich auf die Spektraleigenschaften des eingeschränkten Transfer-Operators zum trigonometrischen Polynom

$$|P_m(\omega)|^2 = \left( \frac{2 + e^{-2\pi i\omega} + e^{2\pi i\omega}}{4} \right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} \left( \frac{2 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}}{4} \right)^k,$$

das für jedes  $m \in \mathbb{N}$  in Hilfssatz 5.28 angegeben wurde. Offensichtlich ist  $\omega = \frac{1}{2}$  die einzige Nullstelle von  $R_m$ . Also gilt Cohen’s Bedingung, und Satz 5.25 liefert sofort die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für alle Startfunktionen  $\eta \in \mathcal{M}_0$  gegen die Skalierungsfunktion  $\phi = \phi_m$ . Weiterhin können wir schließen, dass die  $\mathbb{Z}$ -Shifts der Funktion  $\phi_m$  ein ONS bilden.

Um die Glattheit (bzw. den Sobolev-Exponenten) von  $\phi_m$  zu bestimmen, muss noch der Spektralradius des eingeschränkten Transfer-Operators zum Teilpolynom

$$S_m(\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} \left( \frac{2 - e^{-2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega}}{4} \right)^k$$

$\phi_m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$\beta_m$	0.5	1	1.415...	1.775...	2.096...
$\tilde{\beta}_m$		0.550...	1.088...	1.618...	1.596...

TABELLE 5.1. Glattheit der Daubechies-Skalierungsfunktionen

ermittelt werden. Für kleine Werte von  $m$  gibt Tabelle 5.1 die exakten Werte des Sobolev-Exponenten in Satz 5.24. In der letzten Zeile der Tabelle wird außerdem der entsprechende Koeffizient der Hölder-Stetigkeit von  $\phi_m$  angegeben, also

$$\tilde{\beta}_m = \tilde{\beta}(\phi_m) = \sup\{\alpha \geq 0; \phi \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Für beliebiges  $m$  kann zumindest eine scharfe asymptotische Aussage gezeigt werden. Dazu wird direkt die Fourier-Transformierte  $\hat{\phi}_m$  abgeschätzt. Das folgende Resultat wird im Buch von Louis, Maass und Rieder bewiesen (Satz 2.4.37).

SATZ 5.32. *Der kritische Sobolev-Exponent  $\beta_m$  und der Hölder-Exponent  $\tilde{\beta}_m$  erfüllen*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\beta}_m}{m} = 1 - \log_4 3 \approx 0.20752.$$