Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 19.10.2015

Approximationstheorie

1. Übungsblatt

Abgabetermin: 26.10.2015

Aufgabe 1
Verwenden Sie die Rekursionsformel zur Bestimmung der Tschebyscheff-Polynome 1. Art T_k für $k = 0, 1, 2, 3$. Skizzieren Sie diese Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ (die Verwendung von Matlab ist ausdrücklich erlaubt).

Aufgabe 2
Die Funktion f mit $f(t) = 1/t$ soll auf dem Intervall $[b, c]$, $0 < b < c$, in eine Tschebyscheff-Reihe entwickelt werden. Geben Sie die lineare Koordinatentransformation mit $x(t) = \gamma t + \delta$ von $[b, c]$ auf $[-1, 1]$ an und stellen Sie mit Hilfe von Gleichung (1.4) der Vorlesung die Tschebyscheff-Reihe von f auf dem Intervall $[b, c]$ auf.

Aufgabe 3
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar; ihre Eigenwerte liegen im Intervall $[1, 3]$ (Grund: Gerschgorin-Kreise). Die Tschebyscheff-Reihe aus Aufgabe 2 zum Intervall $[1, 3]$ liefert, durch Einsetzen der Matrix A für die Variable t, die Inverse von A. Berechnen Sie die ersten 4 Partialsummen S_k, $k = 0, 1, 2, 3$, dieser Reihe sowie die Fehler $\|A^{-1} - S_k\|_\infty$ in der Zeilensummennorm.

Zusatzaufgabe
Wir betrachten den Vektorraum $C[0, 1]$ der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit zwei unterschiedlichen Normen, nämlich

- der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$,
- der L_2-norm $\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$.

Beweisen Sie:

a) Für alle $f \in C[0, 1]$ gilt:
$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

b) Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die stetige Funktion $f_n \in C[0, 1]$ mit
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & , x \notin [0, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Funktionen, dass es keine Konstante $C > 0$ gibt, sodass für alle $f \in C[0,1]$ gilt:

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2.$$

Sind die beiden Normen äquivalent?

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`

- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.

- Abgaben zu zweit sind zulässig, in Gruppen mit drei oder mehr Personen jedoch nicht. Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich ab und versehen Sie die Blätter mit Ihrem Namen.