

Approximationstheorie

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 02.11.2015

Aufgabe 4

- Zeichnen Sie den Einheitskreis im $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ für $p = 1, 2, \infty$.
- Geben Sie für den Fall $p = 1$ einen Teilraum $M \subset \mathbb{R}^2$ und ein $f \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ an, sodass f kein eindeutiges Proximum in M besitzt. Skizzieren Sie weiterhin die Menge $\Pi_M(f)$.

Aufgabe 5

Gegeben seien der Banachraum $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, der Teilraum $M = \mathcal{P}_0$ der konstanten Polynome, sowie die Funktionen $g, h \in C[0, 1]$, mit

$$g(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/4, \\ 2 - 4x, & 1/4 \leq x < 1/2, \\ 0, & 1/2 \leq x < 1, \end{cases}$$

und $h = g(1 - \cdot)$.

- Zeigen Sie, dass $p^* \equiv c_f$, mit $c_f := \frac{1}{2} (\min_{x \in [0, 1]} f(x) + \max_{x \in [0, 1]} f(x))$, das eindeutige Proximum an f in M ist.
- Beweisen Sie mit Hilfe von g und h , dass der Operator Π_M nicht linear ist.

Aufgabe 6

Für $p = 1, 2, \infty$ werden die Räume $(L_p(0, 1), \|\cdot\|_p)$ betrachtet. Bestimmen Sie die Menge $\Pi_M(f)$ aller Proxima in $M = \mathcal{P}_0$ zur Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & \text{für } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Setzen Sie Ihre Ergebnisse in Relation zu den Aussagen des Kapitels 2 bzgl. Existenz und Eindeutigkeit von Proxima, sowie der Konvexität der Menge $\Pi_M(f)$.

Zusatzaufgabe

Gegeben seien der Banachraum $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$, der Teilraum

$$M = \{q : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid q \text{ gerades Polynom}\},$$

sowie die Funktionen $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{x^2}$ und $g(x) = x$.

- a) Zeigen Sie, dass $E_M(f) = 0$ ist und dass die Funktion f kein Proximum in M besitzt.
- b) Bestimmen Sie für die Funktion g sowohl $E_M(g)$, als auch mindestens zwei verschiedene Proxima.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben. Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.
- Abgaben zu zweit sind zulässig, in Gruppen mit drei oder mehr Personen jedoch nicht. Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich ab und versehen Sie die Blätter mit Ihrem Namen.