

Approximationstheorie

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 09.11.2015

Aufgabe 9

Gegeben sei der Hilbertraum $(L^2[0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[0, 1]$, mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x) dx$.

- Berechnen Sie das (eindeutige) Proximum in $\mathcal{T}_n := \text{span}\{e^{2\pi ik} \mid -n \leq k \leq n\}$ an f mit $f(x) = x - \frac{1}{2}$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Parseval-Identität von f den Wert der konvergenten Reihe $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Aufgabe 10

Gegeben sind der Hilbertraum $L^2(0, 1)$ und der Teilraum

$$M = \{f \in L^2(0, 1) \mid f(x) = f(1 - x) \text{ fast überall}\}.$$

- Bestimmen Sie das orthogonale Komplement M^\perp des Teilraumes M .
- Zeigen Sie, dass für alle $g \in L^2(0, 1)$ das Proximum in M an g gegeben ist durch

$$\Pi_M(g) = \frac{1}{2}(g + g(1 - \cdot)).$$

Aufgabe 11

Betrachten Sie die Funktion $f := \chi_{[0, 1/2]} \in L^2(0, 1)$.

- Skizzieren Sie den Graphen der 1-periodischen Fortsetzung von f .
- Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Bestimmen Sie die Faltung $f * f$, sowie die zugehörigen Fourier-Koeffizienten $c_k(f * f)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zusatzaufgabe

Ein normierter Raum V heißt *gleichmäßig konvex*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $f, g \in V$ mit $\|f\| = \|g\| = 1$ und $\|f - g\| \geq \varepsilon$ die Ungleichung

$$\left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\| \leq 1 - \delta$$

gilt.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der Parallelogrammgleichung, dass jeder Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ gleichmäßig konvex ist und die Wahl

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}$$

in der Ungleichung zulässt.

- b) Zeigen Sie, dass die gleichmäßige Konvexität die folgende Aussage zur Gleichheit in der Dreiecksungleichung impliziert

$$(*) \quad \|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \quad g \neq 0 \implies f = c \cdot g, \quad c \geq 0.$$

- c) Zeigen Sie, dass (*) strikte Konvexität impliziert. Was bedeutet dies im Hinblick auf die Eindeutigkeit von Proxima in Hilberträumen?

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben. Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.
- Abgaben zu zweit sind zulässig, in Gruppen mit drei oder mehr Personen jedoch nicht. Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich ab und versehen Sie die Blätter mit Ihrem Namen.