Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 09.11.2015

Approximationstheorie

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 16.11.2015

Aufgabe 13
Zu einem Faltungskern K_n nennen wir

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\sin \pi t|^k \; |K_n(t)| \, dt$$

das k'te absolute trigonometrische Moment.

a) Berechnen Sie das zweite absolute trigonometrische Moment des Fejer-Kerns F_n. Was gilt für $n \to \infty$?

b) Verwenden Sie Aufgabenteil a) und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung um das erste absolute trigonometrische Moment von F_n nach oben abzuschätzen. Was gilt hier für $n \to \infty$?

Aufgabe 14
Es sei $K_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$ mit $K_n = 2F_{2n} - F_n$.

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_k(K_n)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes, dass $K_n * p = p$ für alle $p \in \mathcal{T}_n$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit ist.

Aufgabe 15
Hier soll ein Zusammenhang von Orthonormalsystemen und Integralkernen herausgearbeitet werden. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $M \subset L^2(I)$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Wir wissen bereits, dass die metrische Projektion $\Pi_M(\cdot)$ die Orthogonalprojektion von H auf M ist. Durch $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset M$ sei nun eine Orthonormalbasis von M gegeben, und wir definieren die Funktion

$$K_M : I \times I \to \mathbb{C}, \quad K_M(x,y) := \sum_{k=1}^{n} \overline{p_k(x)}\, p_k(y).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $x \in I$ ist $K_M(x,\cdot) \in M$ und für jedes $f \in L^2(I)$ gilt:

$$\Pi_M(f)(x) = \langle f, K_M(x,\cdot)\rangle = \int_I f(y)\overline{K_M(x,y)}\, dy \quad \text{f.ü..}$$

b) K_M ist durch die Eigenschaften in a) eindeutig bestimmt, hängt also nicht von der speziellen Orthonormalbasis ab.
Hinweis: Sei $L : I \times I \to \mathbb{C}$ ein weiterer Kern mit diesen Eigenschaften. Zeigen Sie, dass $L(x,z) = K_M(x,z)$ für festes $x \in I$ und beliebiges $z \in I$ gelten muss. Weisen Sie hierzu insbesondere nach, dass $K_M(x,y) = \overline{K_M(y,x)}$ bzw. $L(x,z) = \overline{L(z,x)}$ gilt.

c) Welcher bekannte Kern ergibt sich für K_M im Fall $I = [0,1]$ und $M = \mathcal{T}_n$?

Zusatzaufgabe
Wir verwenden die Bezeichnungen aus Aufgabe 15 und betrachten alle $p \in M$ mit $p(x_0) = 1$. Zeigen Sie, dass das Element mit minimaler Norm ein Vielfaches von $K_M(x_0, \cdot)$ ist.

E. L. Stiefel verwendete diese Aussage 1958 als Eckpfeiler in der Numerischen Linearen Algebra.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`

- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.

- Abgaben zu zweit sind zulässig, in Gruppen mit drei oder mehr Personen jedoch nicht. Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich ab und versehen Sie die Blätter mit Ihrem Namen.