

Approximationstheorie

5. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.11.2015

Aufgabe 17

Berechnen Sie $\omega(f; t)$ und $\omega_2(f; t)$ für

- a) $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$,
- b) $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$,
- c) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18

Aus den Jackson-Sätzen wissen wir, dass für eine periodische, stetige Funktion $f \in C_*[0, 1]$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C \cdot \omega(f; \frac{1}{n})$ gilt. Darüber hinaus gilt sogar die Abschätzung

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq \omega(f; \frac{1}{2(n+1)}),$$

mit bestmöglicher Konstante $C = 1$, welche Korneichuk 1962 bewiesen hat.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Korneichuk ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $E_{\mathcal{T}_n}(f) < 10^{-4}$ für die folgenden Funktionen aus $C_*[0, 1]$ gilt:

- a) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 3 - 4x, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$
- b) f ungerade mit $f(x) = 1 - (4x - 1)^2$ auf $[0, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 19

Beweisen Sie den folgenden Satz von Dini-Lipschitz:

Die periodische, stetige Funktion $f \in C_*[0, 1]$ erfülle

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\omega(f; \delta) \ln(\delta)| = 0.$$

Dann konvergiert die Folge der Fourier-Partialsummen $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f .

Tipp: Betrachten Sie $S_n(f - p_n)$, wobei p_n das Proximum in \mathcal{T}_n an f ist.

Zusatzaufgabe

Zeigen Sie, dass die (nichtperiodische) Funktion $f \in C[0, 1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

aus $\mathcal{Z} \setminus \text{Lip}_1$ ist.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben. Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.