Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 23.11.2015

Approximationstheorie

6. Übungsblatt

Abgabetermin: 30.11.2015

Aufgabe 21 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Aus $f \in C^1_*[0,1]$ folgt bereits, dass $n \cdot E_n(f) \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Gilt andererseits $\sum_{n=0}^{\infty} E_n(f) < \infty$, so folgt $f \in C^1_*[0,1]$.

Tipp: Verwenden Sie bei Teil b) denselben Ansatz wie im Beweis zu Satz 4.23.

Aufgabe 22
Es sei $f \in C_*[0,1]$ eine periodische, stetige Funktion auf $[0,1]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen zu den Fourierkoeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, von f.

a) Ist $p_n \in \mathcal{T}_n$ das Proximum in $\mathcal{T}_n$ an f, so gilt

$$|c_k(f) - c_k(p_n)| \leq E_{\mathcal{T}_n}(f) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

und daher ebenfalls

$$|c_k(f)| \leq E_{\mathcal{T}_n}(f) \text{ für alle } n < |k|\,.$$

b) Ist darüber hinaus $f \in C^r$, $r \in \mathbb{N}$, und $f^{(r)} \in Lip_\alpha$ mit $0 < \alpha \leq 1$, dann gilt genauer sogar

$$|c_k(f)| = \mathcal{O}(|k|^{-r-\alpha}),\ |k| \to \infty.$$

Aufgabe 23
Es ist bekannt, dass $f \in C_*[0,1]$ eine Lip_α–Funktion mit $0 < \alpha < 1$ ist, wenn $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ mindestens von der Ordnung $n^{-\alpha}$ abnimmt. Dass bei dieser Aussage der Grenzfall $\alpha = 1$ ausgeschlossen werden muss, zeigt folgendes Beispiel.

Durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^2}$$

wird eine stetige Funktion $g \in C_*[0,1]$ definiert. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$E_{\mathcal{T}_n}(g) \leq \frac{1}{n} \quad \text{aber} \quad g \notin Lip_1.$$

Zusatzaufgabe
Zeigen Sie, dass für alle $p_n \in \mathcal{T}_n$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$\frac{3-e}{2\pi n}\,\|p_n'\|_\infty \le \omega(p_n,(2\pi n)^{-1}) \le \frac{1}{2\pi n}\,\|p_n'\|_\infty\,.$$

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.