Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 30.11.2015

Approximationstheorie

7. Übungsblatt

Abgabetermin: 07.12.2015

Aufgabe 25
In der Vorlesung wurde die Glattheit einer Funktion über den Stetigkeitsmodul erklärt. Eine Alternative dazu bietet das K-Funktional mit

$$K(f,t) := \inf_{g \in C_*^1[0,1]} (\|f-g\|_\infty + t\,\|g'\|_\infty).$$

Zeigen Sie, dass für $f \in C_*[0,1]$ stets

$$\frac{1}{2}\omega(f,t) \le K(f,t) \le 2\omega(f,t)$$

gilt, das K-Funktional also äquivalent zum Stetigkeitsmodul ist.
Verwenden Sie hierbei als (differenzierbare) Vergleichsfunktion für die Abschätzung nach oben das Steklov-Mittel g mit

$$g(\xi) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(\xi+u)du.$$

Aufgabe 26
Bestimmen Sie zu der Funktion $f \in C[-1,1]$ mit $f(x) = \sqrt{|x+1|}$ eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\omega_\varphi(f,t) \le Ct \quad \text{für} \quad 0 < t < 1.$$

Aufgabe 27
Für $\alpha > 0$ sei folgende Funktion definiert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} T_{2^k}(x), \quad x \in [-1,1].$$

Zeichnen Sie mit Matlab jeweils die Partialsummen $S_5 f, S_{10} f$ und $S_{20} f$ zu $\alpha = 0.5, 1, 2$. Verwenden Sie zur kompakteren Darstellung den Befehl *subplot*.

Zusatzaufgabe
Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Funktion f aus Aufgabe 27.

a) $f \notin \mathrm{Lip}_\beta$ für jedes $\beta > \frac{\alpha}{2}$.

b) $E_{\mathcal{P}_n}(f) \leq \frac{n^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`

- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.