Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 07.12.2015

Approximationstheorie

8. Übungsblatt

Abgabetermin: 14.12.2015

Aufgabe 29 Geben Sie die Markov-Ungleichung(en) aus Satz 5.20 für Polynome auf $[a, b]$, $a < b$, an.

Aufgabe 30 Es sei P_n ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $|P_n(x)| \leq M$ für alle $x \in [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass dann

$$|P_n(x)| \leq M \cdot |T_n(x)|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$

gilt.

Aufgabe 31 Wir betrachten den Raum $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$, den Integraloperator I mit

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt,$$

sowie die Gaußsche Quadraturformel Q_n mit $m + 1$ Knoten und Exaktheitsgrad $n = 2m + 1$

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{m} A_k \cdot f(t_k).$$

a) Bestimmen Sie die Operatornormen von I und Q_n.

b) Das Proximum $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ lässt sich zur Fehlerabschätzung bei Quadraturformeln einsetzen. Zeigen Sie, dass

$$|I(f) - Q_n(f)| \leq 4 \cdot E_{\mathcal{P}_n}(f).$$

Zusatzaufgabe Bestimmen Sie gemäß Rieszschem Darstellungssatz zu den folgenden linearen Funktionalen $\lambda, \mu : L^2(0, 1) \to \mathbb{C}$ einen Repräsentanten $g \in L^2(0, 1)$, sodass $\lambda(f) = \langle f, g\rangle$ gilt.

a) $\lambda(f) = S_n f(\frac{1}{2})$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $\mu(f) = \sum_{k\neq 0} \dfrac{c_k(f)}{2\pi ik}$.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.