Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. T. Kloos

Dortmund, 05.01.2016

Approximationstheorie

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 11.01.2016

Alle Aufgaben beziehen sich auf den Alternantensatz.

Aufgabe 37 (Proximum in $\mathcal{P}_1$ für konvexe Funktionen)
Gegeben sei $f \in C^2[a,b]$ mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.
a) Zeigen Sie, dass genau ein c im offenen Intervall (a,b) existiert mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Konstruieren Sie das Proximum $p \in \mathcal{P}_1$ mit $p(x) = d + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, indem Sie d so bestimmen, dass $f - p$ die Extremalalternante (a, c, b) besitzt.
c) Berechnen Sie die beste Tschebyscheff–Approximation an f mit $f(x) = e^{2x}$ durch Elemente aus $\mathcal{P}_1$ auf $[0,1]$.

Aufgabe 38
Die Tschebyscheff–Polynome erster Art auf $[-1,1]$ sind definiert durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Geben Sie die Punkte $-1 = x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$ der Extremalalternante von T_n an.
b) Bestimmen Sie den Höchstkoeffizienten von T_n (mit der bekannten Rekursionsformel).
c) Bestimmen Sie das Proximum von $f \in C[-1,1]$ mit $f(x) = x^n$ im Polynomraum $\mathcal{P}_{n-1}$. (Hinweis: Die Fehlerfunktion hat etwas mit T_n zu tun.)

Aufgabe 39
Wir betrachten die Tschebyscheff-Approximation reellwertiger periodischer Funktionen in $C_*[0,1]$ mit dem Raum der reellen trigonometrischen Polynome

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}\,(1,\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x, \ldots, \cos 2\pi n x,\ \sin 2\pi n x).$$

Bestimmen Sie für $n = 5$ das Proximum folgender Funktionen:
a) $f(x) = \sin 20\pi x$ b) $g(x) = |\sin 20\pi x|$

Zusatzaufgabe
Es sei $a > 1$ und $\beta = a - \sqrt{a^2 - 1}$ sowie $M = \frac{4\beta^{n+2}}{(1-\beta^2)^2}$. In der Einleitung (Kap. 1) wurde ein Ergebnis zur Bestapproximation der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a-x}$ angegeben, das wir nun mit Hilfe des Alternantensatzes beweisen wollen.

a) Zeigen Sie, dass sich die Tschebyscheff-Polynome T_n mit der Variablen $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| = 1$ und $\operatorname{Re} v = x$ schreiben lassen als

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(v^n + v^{-n}).$$

b) Zeigen Sie, dass durch

$$\frac{1}{a-x} - p(x) = \frac{M}{2}\left\{v^n \,\frac{v-\beta}{1-\beta v} + v^{-n}\,\frac{1-\beta v}{v-\beta}\right\} \tag{1}$$

ein reelles Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert ist. Hierbei seien v und x wie in Teil a) miteinander verknüpft.
c) Zeigen Sie, dass die rechte Seite in (1) eine Extremalalternante der Länge $n + 2$ hat.