Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Kloos

Dortmund, 18.01.2016

Approximationstheorie

11. Übungsblatt

Abgabetermin: 24.01.2016

Aufgabe 41 Zeigen Sie, dass die Bernstein-Grundpolynome $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \le k \le n$ und $n \in \mathbb{N}$, folgende Eigenschaften erfüllen:

a) $p_{n,k}$ hat sein Maximum bei $x = k/n$, ist monoton wachsend in $[0, k/n]$ und monoton fallend in $[k/n, 1]$.

b) Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 p_{n,k}(x)dx = \frac{1}{n+1}$$
gilt. Verwenden Sie hierbei die Identität $p_{n,k}(x) = \frac{1}{n+1}\, p'_{n+1,k+1}(x) + p_{n,k+1}(x)$.

Aufgabe 42 Laden Sie sich die `MATLAB`-Funktionsskripte `fcta` und `fctb` von der Veranstaltungsseite herunter und plotten Sie die Funktionsgraphen, sowie die Graphen der zugehörigen Approximationen $B_n f$ zu $n = 1, 2, 5, 10, 20, 50$.

Aufgabe 43 Die Momente des Bernstein-Operators sind definiert als
$$T_{n,s}(x) = B_n[(\cdot - x)^s](x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^s p_{n,k}(x), \quad s \in \mathbb{N}_0.$$
Beachten Sie, dass $T_{n,0} = 1$ und $T_{n,1} = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Momente die folgende erzeugende Funktion besitzen
$$\Phi(x, u) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} T_{n,s}(x) u^s = e^{-ux}(1 - x + e^{u/n} x)^n.$$

Zusatzaufgabe Gegeben sei der lineare Bernstein-Durrmeyer Operator $M_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit
$$M_n(f) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \langle f, p_{n,k} \rangle p_{n,k}, \quad \langle f, p_{n,k} \rangle = \int_0^1 f(x) p_{n,k}(x)\, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass $M_n e_0 = e_0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e_0 \equiv 1$ die konstante Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass $M_n e_1 \to e_1 (n \to \infty)$ gilt, wobei $e_1(x) = x$ ist.

c) Prüfen Sie, ob $M_n, n \in \mathbb{N}$, ein positiver Operator ist.

d) Bestimmen Sie die Operatornorm $\|M_n\|_{op} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|M_n(f)\|_\infty$ von M_n, $n \in \mathbb{N}$.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`

- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.