Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Kloos

Dortmund, 03.02.2016

Approximationstheorie

13. Übungsblatt

- ohne Abgabe -

Aufgabe 49
Der Schoenberg-Operator $S_k : C[a,b] \to \mathcal{S}_k(\Delta)$ ist punktweise gegeben durch

$$S_k f(t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*) N_{k,i}(t), \qquad t_i^* = \frac{t_{i+1} + \ldots + t_{i+k-1}}{k-1}.$$

a) Zeigen Sie, dass S_k ein linearer und positiver Operator ist.

b) Beweisen Sie, dass S_k für $k \geq 2$ die Monome e_0 und e_1 auf dem wesentlichen Parameterintervall $[t_k, t_{n+1}]$ reproduziert.

c) Zeigen Sie, dass S_k im Fall $\Delta = \{0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1\}$ mit k-fachen Knoten 0 und 1 der Bernstein-Operator B_{k-1} ist.

Aufgabe 50
Zeigen Sie, dass

$$\|f - S_k(f)\|_{\infty,[t_j,t_{j+1}]} \leq 2 \inf_{p \in \mathcal{P}_1} \|f - p\|_{\infty,[t_{j-k+1},t_{j+k}]}$$

gilt und folgern Sie

$$\|f - S_k(f)\| \leq c_k \, (\delta t)^2 \, \|f''\|_\infty .$$

Aufgabe 51
Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung des B-Splines

$$N'_{k,i}(t) = M_{k-1,i}(t) - M_{k-1,i+1}(t)$$

gilt und folgern Sie daraus die Rekursion für $0 \leq m \leq k-2$

$$N_{k,i}^{(m)}(t) = \frac{k-1}{k-m-1} \left[\frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{k-1,i}^{(m)}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{k-1,i+1}^{(m)}(t) \right].$$

Aufgabe 52
Es seien (t_i) kardinale Knoten, also $t_i = i$. Beweisen Sie, dass

$$N_{k,i}^{(k-1)}(t) = (-1)^l \binom{k-1}{l}, \quad t \in (t_{i+l}, t_{i+l+1}).$$

Dabei reicht es die Behauptung für ein beliebiges $i \in \mathbb{Z}$ zu zeigen. Für alle weitere B-Splines folgt die Aussage anschließend aus der Shift-Invarianz $N_{k,i}(t) = N_{k,i-1}(t-1)$.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`
- Pro Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden.
  Ein unbenoteter Modulabschluss wird aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen und der sinnvollen Bearbeitung der Pflichtaufgaben (40% der Punkte) vergeben.
  Die Modulprüfung für den Erhalt eines benoteten Modulabschlusses findet im Anschluss an die Veranstaltung als mündliche Prüfung statt.