

### 3 Approximation im Hilbertraum

---

Die Bestapproximation im Hilbertraum ist geometrisch deutbar. Die Bestimmung kürzester Abstände zu einem (abgeschlossenen) Teilraum  $M \subset V$  entspricht dem "Fällen des Lots", also der Orthogonalprojektion auf  $M$ . Dadurch lassen sich die Existenz- und Eindeutigkeitssätze aus dem vorherigen Kapitel genauer fassen. Außerdem liegt hier der besondere Fall vor, dass die metrische Projektion  $\Pi_M : V \rightarrow M$  ein linearer Operator ist.

#### 3.1 Best-Approximation und Orthogonal-Projektion

Wir stellen zunächst einige Grundlagen zu Hilberträumen zusammen.

**3.1 Notation.** Sei  $H$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$  (mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  ein Skalarprodukt; das heißt es gelten die folgenden drei Eigenschaften:

1.  $\langle f, f \rangle \geq 0$  für alle  $f \in H$  und  $(\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0)$  (Definitheit)
2.  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$  (Linearität in der 1. Komp.)
3.  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ . (Symmetrie)

Auf  $H$  ist durch  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$  eine Norm definiert.

Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

und die Parallelogramm-Identität

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in  $H$  besitzt. Dann heißt  $H$  ein **Hilbertraum**.

**3.2 Lemma.** *Alle Hilberträume sind strikt konvex.*

**Beweis.** Wir rechnen für  $f, g \in H$  mit  $\|f\| = \|g\| = 1$  und  $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \|\alpha f + (1 - \alpha) g\|^2 &= \langle \alpha f + (1 - \alpha) g, \alpha f + (1 - \alpha) g \rangle \\ &= \alpha^2 \|f\|^2 + (1 - \alpha)^2 \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle \alpha f, (1 - \alpha) g \rangle) \\ &= \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2 \alpha (1 - \alpha) \operatorname{Re}(\langle f, g \rangle) \\ &= 1 - 2 \alpha (1 - \alpha) \underbrace{(1 - \operatorname{Re}(\langle f, g \rangle))}_{\geq 0} \leq 1. \end{aligned}$$

Gleichheit  $\operatorname{Re}(\langle f, g \rangle) = 1$  gilt genau dann, wenn  $f = \beta g$  für ein  $\beta > 0$  gilt, hier ist wegen  $\|f\| = \|g\| = 1$  auch  $\beta = 1$ . Also folgt für  $f \neq g$  die strikte Ungleichung „ $<$ “, und damit die strikte Konvexität von  $H$ .  $\square$

Der folgende Satz macht das Arbeiten in Hilberträumen oft sehr handlich.

**3.3 Satz.** *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis  $\{e_k : k \in I\}$  mit einer Indexmenge  $I$ ; im Einzelnen gilt*

1.  $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}$  für  $j, k \in I$
2. Für jedes  $f \in H$  und  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  sowie Koeffizienten  $c_j \in \mathbb{K}$  für  $j \in J$  mit

$$\left\| f - \sum_{j \in J} c_j e_j \right\| \leq \varepsilon.$$

Falls  $I$  endlich oder abzählbar ist, so nennt man  $H$  **separabel**.

Der Beweis für separable Hilberträume ist konstruktiv: man beginnt mit einem Element  $e_1 \in H$ ,  $\|e_1\| = 1$ , wählt dann  $e_2$  mit Norm 1 im orthogonalen Komplement zu  $e_1$ ,  $e_3$  im orthogonalen Komplement des Aufspans von  $\{e_1, e_2\}$ , usw. Wir beschäftigen uns nur mit separablen Hilberträumen, die auch in den Anwendungen auftreten, setzen also immer eine endliche oder abzählbare Indexmenge  $I$  voraus.

**3.4 Beispiel.** •  $\mathbb{R}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  oder  $\mathbb{C}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ . Eine ONB ist die Familie  $\{e_k; k = 1, \dots, n\}$  der kanonischen Einheitsvektoren; oder die Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  der Spalten einer Orthogonalmatrix bzw. unitären Matrix.

•  $\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} : a_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k$ . Eine ONB ist die Menge  $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$  der Folgen  $e_k = (\delta_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$  (unendliche Einheitsvektoren)

•  $\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (b_k)_{k \in \mathbb{Z}} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \bar{b}_k$ . Eine ONB ist die Menge  $\{e_k; k \in \mathbb{Z}\}$  der beidseitig unendlichen Folgen  $e_k = (\delta_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}}$

•  $L^2(0, 1) := \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar und } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ . Eine ONB ist  $\{v_k : k \in \mathbb{Z}\}$  mit  $v_k(x) = e^{2\pi i k x}$ . Man erkennt sofort die Isomorphie zum Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

- $L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar und } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ . Mit der abzählbaren Indexmenge  $I = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  schreiben wir die ONB  $\{v_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  mit  $v_{j,k}(x) = \chi_{(j,j+1)}(x) e^{2\pi i k x}$ . Weitere Orthonormalbasen sind sog. **Wavelet-Basen**.

In den letzten beiden Beispielen müssen eigentlich Äquivalenzklassen von Funktionen betrachtet werden mit  $f = g$  fast überall.

**3.5 Bemerkung.** a) Alle endlich-dimensionalen Hilberträume  $H$  mit  $\dim(H) = m$  sind isometrisch isomorph zu  $\mathbb{K}^m$ . Genauer: die lineare Abbildung, die den Vektoren  $v_k$  einer ONB von  $H$  die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{K}^m$  zuordnet, ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beispiel: Der Teilraum  $\mathcal{T}_n = \text{span}(v_k : -n \leq k \leq n)$  mit  $v_k(x) = e^{2\pi i k x}$  ist ein Teilraum von  $L^2(0, 1)$  der Dimension  $2n + 1$ . Die angegebene Isometrie liefert zum trigonometrischen Polynom  $p = \sum_{k=-n}^n c_k v_k$  den Koeffizientenvektor  $(c_k)_{k=-n, \dots, n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ .

b) Alle separablen Hilberträume mit  $\dim(H) = \infty$  sind isometrisch isomorph zu  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Dazu wählt man als Indexmenge der ONB von  $H$  die Menge  $\mathbb{N}$  und definiert die gleiche Isometrie wie im endlich-dimensionalen Fall. Dieser Gesichtspunkt verdeckt jedoch die Bedeutung der Hilberträume: es ist gerade die spezielle Gestalt der Orthonormalbasen, die die Verwendung verschiedener Hilberträume in den Anwendungen so interessant macht ( $L^2(0, 1)$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ , Sobolev-Räume etc.)

Orthonormalbasen  $\{v_k : 1 \leq k \leq m\}$  im  $\mathbb{K}^m$  erlauben bekanntermaßen die Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, v_k \rangle v_k \quad \text{für } f \in \mathbb{K}^m.$$

Die Verallgemeinerung auf unendlich-dimensionale Hilberträume liefert das folgende zentrale Resultat.

**3.6 Satz.** Sei  $H$  ein separabler Hilbertraum mit  $\dim(H) = \infty$  und  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Dann gilt

1. **Bessel'sche Ungleichung:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f \in H$  gilt

$$\sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

2. **Parseval-Identität:** Für alle  $f \in H$  gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

3. Die **Bestapproximation** von  $f \in H$  in  $M = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  ist gegeben durch

$$v^* = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \text{ und es gilt}$$

$$E_M(f) = \|f - v^*\| = \inf_{v \in M} \|f - v\| = \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**3.7 Bemerkung.** Die Parseval-Identität erklärt nochmals die Isometrie von  $H$  zu  $\ell^2(\mathbb{N})$ : Die Norm von  $f$  ist gleich der  $\ell^2$ -Norm des Koeffizientenvektors  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in der Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle.$$

Weiterhin konvergiert die obige Reihe in  $H$  gegen  $f$ , denn

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| = \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Wir kennen solche Reihen aus der Analysis: für  $L^2(0, 1)$  ergibt sich hier die Fourier-Reihe in der komplexen Schreibweise mit den Basisfunktionen  $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ . In der Einleitung haben wir als weiteres Beispiel die Chebyshev-Reihe für den Raum

$$L_w^2(-1, 1) = \{f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty\}$$

kennengelernt. Hierzu bilden  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k$  (Chebyshev-Polynome) eine ONB.

Der Beweis von Satz 3.6 wird üblicherweise in der Funktionalanalysis gegeben. Sein wichtigster Bestandteil ist der folgende Satz zur Orthogonalprojektion, der in der Sprechweise der Approximationstheorie wie folgt lautet.

**3.8 Satz.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $M \subseteq H$  ein abgeschlossener Teilraum. Dann existiert zu jedem  $f \in H$  genau ein Proximum  $v^* \in M$ , d.h.  $M$  ist eine Chebyshev-Menge.

**Beweis.** Dass  $M$  eine Eindeutigkeitsmenge ist, folgt aus der strikten Konvexität von  $H$ . Wir müssen also zeigen, dass  $M$  Existenzmenge ist.

Zu beliebigem  $f \in H$  wählen wir eine Minimalfolge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $v_n \in M$  und

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = E_M(f)$ . Wir zeigen nun, dass  $(v_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Für  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt mit der Parallelogramm-Identität

$$\begin{aligned} (E_M(f))^2 &\leq \left\| f - \frac{1}{2}(v_n + v_m) \right\|^2 \leq \left\| f - \frac{1}{2}(v_n + v_m) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(v_n - v_m) \right\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \text{Re}(\langle f, v_n + v_m \rangle) + \frac{1}{4} \|v_n + v_m\|^2 + \frac{1}{4} \|v_n - v_m\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \text{Re}(\langle f, v_n + v_m \rangle) + \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \frac{1}{2} \|v_m\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|f - v_n\|^2 + \frac{1}{2} \|f - v_m\|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} (E_M(f))^2. \end{aligned}$$

Also konvergiert der zusätzliche Summand  $\|v_n - v_m\|^2$  in der ersten Zeile gegen 0 für  $n, m \rightarrow \infty$ . Damit ist  $(v_n)$  eine Cauchy-Folge.

Da  $M$  als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raums  $H$  selbst vollständig ist, besitzt  $(v_n)$  einen Grenzwert  $v^* := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in M$ . Dieser Grenzwert ist das Proximum  $v^*$  an  $f$ , denn

$$\|f - v^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = E_M(f).$$

□

Die metrische Projektion

$$\Pi_M : V \rightarrow M, \quad \Pi_M(f) = v^* \quad \text{mit} \quad \|f - v^*\| = E_M(f)$$

ist also für jeden abgeschlossenen Teilraum  $M \subseteq H$  definiert. Ihre geometrische Bedeutung als Orthogonalprojektion wird in folgendem Satz gezeigt.

**3.9 Satz.** *Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $M \subseteq H$  ein abgeschlossener Teilraum,  $M \neq \{0\}$ . Die metrische Projektion*

$$\Pi_M : H \longrightarrow M, \quad \Pi_M(f) = v^*$$

*ist die **Orthogonalprojektion** auf  $M$ . Das heißt im Einzelnen:*

(i) *Für alle  $f \in H$  und  $v \in M$  ist*

$$\langle f - \Pi_M(f), v \rangle = 0,$$

*d.h.  $f - \Pi_M(f)$  liegt im **orthogonalen Komplement***

$$M^\perp := \{g \in H : \langle g, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}.$$

(ii) *Jedes  $f \in H$  besitzt eine eindeutige Zerlegung*

$$f = v + w \quad \text{mit} \quad v \in M, \quad w \in M^\perp.$$

*Hierbei ist  $v = \Pi_M(f)$ ,  $w = f - \Pi_M(f)$  und es gilt*

$$\|f\|^2 = \|\Pi_M(f)\|^2 + \|f - \Pi_M(f)\|^2.$$

(iii)  *$\Pi_M$  ist linear, stetig mit Operatornorm  $\|\Pi_M\| = 1$ , idempotent und selbstadjungiert. Im Einzelnen: für alle  $f, g \in H$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt*

$$\Pi_M(\alpha f + \beta g) = \alpha \Pi_M(f) + \beta \Pi_M(g), \quad \sup_{\|f\|=1} \|\Pi_M(f)\| = 1,$$

$$\Pi_M(\Pi_M(f)) = \Pi_M(f), \quad \langle \Pi_M(f), g \rangle = \langle f, \Pi_M(g) \rangle.$$

**Beweis.** (i) und (ii): Für  $f \in H$  sei  $v^* = \Pi_M(f)$  das Proximum. Um zu zeigen, dass  $(f - v^*) \in M^\perp$  gilt, definieren wir zu beliebig gewähltem  $v \in M \setminus \{0\}$  die reelle Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\alpha) := \|f - v^* - \alpha v\|^2 = \|f - v^*\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(\langle f - v^*, v \rangle) + \alpha^2 \|v\|^2.$$

$\Phi$  ist ein quadratisches Polynom mit positivem Höchstkoeffizienten  $\|v\|^2$  und besitzt bei  $\alpha = 0$  sein Minimum, weil  $v^*$  das eindeutige Proximum an  $f$  ist. Also gilt

$$\Phi'(0) = -2 \operatorname{Re}(\langle f - v^*, v \rangle) = 0.$$

Analog betrachtet man die Abbildung  $\tilde{\Phi}(\alpha) := \|f - v^* - i\alpha v\|^2$ , falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist, und erhält  $\tilde{\Phi}'(0) = -2 \operatorname{Im}(\langle f - v^*, v \rangle) = 0$ . Insgesamt ist also

$$\langle f - v^*, v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Damit ist  $f = v^* + (f - v^*)$  die orthogonale Zerlegung von  $f$  in (ii) und es gilt

$$\|f\|^2 = \|v^* + (f - v^*)\|^2 = \|v^*\|^2 + \|f - v^*\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\underbrace{\langle f - v^*, v^* \rangle}_{=0}).$$

Jede weitere Zerlegung  $f = v + w$  mit  $v \in M$  und  $w \in M^\perp$  ergibt

$$v - v^* = (f - v^*) - w \in M \cap M^\perp, \quad \text{also } v - v^* = w - (f - v^*) = 0.$$

Damit ist die orthogonale Zerlegung eindeutig.

(iii) Additivität: Seien  $f, g \in H$ ,  $f = v^* + (f - v^*)$  und  $g = w^* + (g - w^*)$  die orthogonalen Zerlegungen mit Proxima  $v^*$  bzw.  $w^*$ . Dann ist

$$f + g = \underbrace{v^* + w^*}_{\in M} + \underbrace{((f - v^*) + (g - w^*))}_{\in M^\perp}$$

die (eindeutige) orthogonale Zerlegung von  $f + g$ , also ist  $\Pi_M(f + g) = v^* + w^*$ .

Multiplikativität: folgt analog.

Stetigkeit: Für  $f = v^* + (f - v^*)$  ist wegen (ii)  $\|v^*\|^2 \leq \|f\|^2$ , also ist die Operatornorm  $\|\Pi_M\| \leq 1$ . Speziell für  $v \in M \setminus \{0\}$  ist  $\Pi_M(v) = v$ , also ist die Operatornorm  $\|\Pi_M\| = 1$ .

Als linearer und beschränkter Operator ist  $\Pi_M$  stetig.

Idempotenz: Für  $f = v^* + (f - v^*)$  ist  $\Pi_M(\Pi_M(f)) = \Pi_M(v^*) = v^*$ .

Selbstadjungiertheit: Mit (i) folgt

$$\langle f, \Pi_M(g) \rangle = \langle \Pi_M(f) + (f - \Pi_M(f)), \Pi_M(g) \rangle = \langle \Pi_M(f), \Pi_M(g) \rangle$$

und ebenso  $\langle \Pi_M(f), g \rangle = \langle \Pi_M(f), \Pi_M(g) \rangle$ . Daraus folgt die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

**3.10 Bemerkung.** Wir haben in diesem Abschnitt zuerst gezeigt, dass abgeschlossene Teilräume im Hilbertraum Chebyshev-Mengen sind. Dann haben wir die metrische Projektion in Satz 3.9 als die Orthogonalprojektion identifiziert. Man hätte auch andersherum vorgehen können und mit Hilfe einer Orthonormalbasis  $\{v_k : k \in J\}$  des Teilraums  $M$  die Orthogonalprojektion

$$\Pi_M : V \rightarrow M; \quad \Pi_M(f) = \sum_{k \in J} \langle f, v_k \rangle v_k$$

definieren können, um dann zu zeigen, dass  $v^* = \Pi_M(f)$  das Proximum von  $f$  ist. Unser Vorgehen hat den Vorteil, dass wir ohne die Auswahl einer Orthonormalbasis von  $M$  auskommen.

### 3.2 Der Hilbertraum $L^2(0, 1)$

Wir betrachten nun den Raum

$$L^2(0, 1) = \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Als Orthonormalbasis verwenden wir die komplexen Exponentialfunktionen  $e_k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ , mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Der Teilraum der **trigonometrischen Polynome** vom Grad  $\leq n$  ist

$$\mathcal{T}_n := \text{span} \{e_k : -n \leq k \leq n\}.$$

Es ist  $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$ .

**3.11 Bemerkungen.** a) Der Vektorraum der absolut-integrierbaren Funktionen

$$L^1(0, 1) = \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx < \infty \right\}$$

enthält den Raum  $L^2(0, 1)$ , denn mit Cauchy-Schwarz gilt für  $f \in L^2(0, 1)$

$$\|f\|_1 \leq \left( \int_0^1 1 dx \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

b) Die Funktionen in  $L^1(0, 1)$  fassen wir als periodische Funktionen mit Periodenlänge 1 auf.

c) Die Vollständigkeit der Orthonormalbasis  $\{e_k(x) = e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  von  $L^2(0, 1)$  stellt man fest, indem man eine der äquivalenten Bedingungen prüft:

(i) Die Menge  $M := \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  der endlichen Linearkombinationen ist dicht in  $L^2(0, 1)$ .

(ii) Es ist  $M^\perp = \{0\}$ , das heißt aus  $\langle f, e_k \rangle = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  folgt  $f \equiv 0$  fast überall.

(iii) Es gilt die Parseval-Identität  $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_k \rangle|^2$  für alle  $f \in L^2(0, 1)$ .

Die Äquivalenz dieser drei Aussagen ist leicht einzusehen. Jedoch erfordert der Beweis einer der Aussagen zur Vollständigkeit der ONB viel Aufwand. Wir werden dies im Laufe dieses Kapitels in Satz 3.25 erledigen.

**3.12 Definition.** Die **Fourierkoeffizienten** von  $f \in L^1(0, 1)$  sind

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

und die **Fourierreihe** lautet

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k.$$

**3.13 Bemerkung.** a) Für  $f \in L^1(0, 1)$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k(f) = 0$ . (**Satz von Riemann und Lebesgue**)

b) Für  $f \in L^2(0, 1)$  gilt die Parseval-Identität  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2$ , also insbesondere  $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ .

c) Für  $f \in C_*^r[0, 1] = \{f \in C^r(\mathbb{R}) : f \text{ ist 1-periodisch}\}$  zeigt man mit partieller Integration

$$c_k(f) = (2\pi i k)^{-r} c_k(f^{(r)}), \quad k \neq 0,$$

also liegt das Abklingverhalten  $c_k(f) = o(|k|^{-r})$  vor.

Eine wichtige Operation im Umgang mit Fourierreihen ist die Faltung periodischer Funktionen.

**3.14 Definition (Faltung).** Für  $f, g \in L^1(0, 1)$  definieren wir die periodische Faltung

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y) g(x - y) dy.$$

Hierbei wird  $g$  als periodische Funktion mit Periodenlänge 1 auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt.



**3.15 Beispiel.** Das folgende Beispiel macht die Bedeutung der Faltung besonders klar. Es sei  $0 < \delta < 1/2$  und  $g$  die 1-periodische Funktion mit den Funktionswerten

$$g(x) = \begin{cases} (2\delta)^{-1}, & 0 \leq |x| \leq \delta, \\ 0, & \delta < |x| \leq 1/2 \end{cases}$$

im Periodenintervall  $[-1/2, 1/2]$ . Dann ist

$$f * g(x) = (2\delta)^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-y) dy$$

ein Integralmittelwert von  $f$  über das Intervall  $[x-\delta, x+\delta]$ . Man nennt  $f * g$  ein "gleitendes Mittel" von  $f$ .

Konkret: Der Graph der 1-periodisch fortgesetzten Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = x$ , ist die unstetige Sägezahnkurve mit Sprungstellen in  $\mathbb{Z}$ . Das gleitende Mittel ist

$$f * g(x) = \begin{cases} x, & \delta \leq x \leq 1 - \delta, \\ \frac{1}{2} - \frac{(1-2\delta)x}{2\delta}, & 0 \leq x < \delta, \\ \frac{1}{2} + \frac{(1-2\delta)(1-x)}{2\delta}, & 1 - \delta < x \leq 1. \end{cases}$$

Dies ist eine stetige Funktion, also eine "Glättung" von  $f$ .

Die folgende Rechenregel gilt für die periodische Faltung.

**3.16 Satz** (Faltungssatz). Für  $f, g \in L^1(0, 1)$  gilt  $f * g \in L^1(0, 1)$  und

$$c_k(f * g) = c_k(f) c_k(g).$$

**Beweis.** Der Satz von Fubini ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f * g(x)| dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(y)| |g(x-y)| dy dx = \int_0^1 |f(y)| \underbrace{\int_0^1 |g(x-y)| dx}_{= \int_0^1 |g(x)| dx} dy = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Die Koordinatenverschiebung im Integral über  $g$  ist gerechtfertigt, weil über eine ganze Periode integriert wird. Also ist  $f * g \in L^1(0, 1)$ . Ebenso erhalten wir mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} c_k(f * g) &= \int_0^1 f * g(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_0^1 \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} g(x-y) e^{-2\pi i k (x-y)} dy dx \\ &= \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} \underbrace{\int_0^1 g(x-y) e^{-2\pi i k (x-y)} dx}_{= c_k(g)} dy = c_k(f) c_k(g). \end{aligned}$$

□

**3.17 Bemerkung.** Die Faltung von  $f \in L^2(0, 1)$  und  $g \in L^1(0, 1)$  ist wieder eine Funktion in  $L^2(0, 1)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |f * g(x)|^2 dx &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(y)| |g(x-y)| dy \right)^2 dx \\
 &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(y)|^2 |g(x-y)| dy \right) \underbrace{\left( \int_0^1 |g(x-y)| dy \right)}_{=\|g\|_1} dx \\
 &= \|g\|_1 \int_0^1 \int_0^1 |f(y)|^2 |g(x-y)| dx dy \\
 &= \|g\|_1^2 \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Also ist  $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1$ . Eine allgemeine Aussage für die Faltung von  $f \in L^p(0, 1)$  und  $g \in L^q(0, 1)$  gibt die Young'sche Ungleichung.

Wir kehren nun zurück zur Bestapproximation von  $f \in L^2(0, 1)$  durch den Raum  $\mathcal{T}_n$  der trigonometrischen Polynome. Als direkte Folgerung aus dem allgemeinen Approximati-  
onssatz im Hilbertraum ergibt sich der Satz zur Fourier-Approximation.

**3.18 Folgerung.** Die metrische Projektion  $\Pi_M : L^2(0, 1) \rightarrow M = \mathcal{T}_n$  ist gegeben durch die **Fourierpartialsomme**

$$\Pi_M(f) = S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k, \quad e_k(x) = e^{2\pi i k x},$$

und es gilt

$$E_M(f) = \|f - S_n(f)\| = \left( \sum_{|k| \geq n+1} |c_k(f)|^2 \right)^{1/2}.$$

**3.19 Bemerkung.** Für  $r$ -mal stetig differenzierbare periodische Funktionen  $f \in C_*^r[0, 1]$  gilt  $\|f - S_n(f)\| = o(n^{-r})$ , denn

$$\sum_{|k| \geq n+1} |c_k(f)|^2 = (2\pi n)^{-2r} \sum_{|k| \geq n+1} \underbrace{\frac{n^{2r}}{|k|^{2r}}}_{\leq 1} |c_k(f^{(r)})|^2 \leq (2\pi n)^{-2r} \sum_{|k| \geq n+1} |c_k(f^{(r)})|^2,$$

und die Restsumme konvergiert gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ . So erkennen wir schon einen Zusammenhang zwischen der Glattheit von  $f$  und der Größenordnung des Approximationsgrades  $\|f - S_n f\|$ .

Mit der folgenden Rechnung erhalten wir eine Darstellung der Fourier-Partialsumme mit Hilfe der Faltung. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} dy e^{2\pi i k x} \\ &= \int_0^1 f(y) \left( \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k(x-y)} \right) dy = f * D_n(x) \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} = e^{-2\pi i n x} \sum_{k=0}^{2n} (e^{2\pi i x})^k \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-2\pi i n x} (e^{2\pi i (2n+1)x} - 1)}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}, & x \in (0, 1), \\ 2n+1, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$D_n$  heißt **Dirichlet-Kern**. Man beachte, dass trotz der rationalen Darstellung  $D_n$  ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$  ist.

Durch die Faltung können wir auch allgemeinere lineare Abbildungen erklären.

**3.20 Definition** (Faltungsoperator, Faltungskern). *Es sei  $K \in L^1(0, 1)$ . Dann heißt*

$$T_K : L^2(0, 1) \longrightarrow L^2(0, 1), \quad T_K f(x) = f * K(x) = \int_0^1 f(y) K(x-y) dy$$

**Faltungsoperator**, und  $K$  der zugehörige **Faltungskern**.

**3.21 Bemerkung.** Mit dem Faltungssatz sieht man sofort ein, dass für  $K \in \mathcal{T}_n$  auch  $T_K f = f * K \in \mathcal{T}_n$  ist. Genauer gilt:

$$K = \sum_{k=-n}^n a_k e_k \implies f * K = \sum_{k=-n}^n a_k c_k(f) e_k.$$

Solche Faltungskerne nennt man auch Fourier-Multiplier oder Filter, da sie die Fourierkoeffizienten  $c_k(f)$  mit einem Gewicht  $a_k$  (evtl. auch Null) multiplizieren. Faltungskerne mit Fourierkoeffizienten  $0 \leq a_k \leq 1$  sind besonders nützlich.

### 3.22 Beispiel (Wichtige Faltungskerne der Approximationstheorie).

a) **Dirichlet-Kern:**

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}, & x \in (0, 1), \\ 2n+1, & x = 0. \end{cases} \in \mathcal{T}_n.$$

Die Fourierkoeffizienten sind  $a_k = 1$  für  $|k| \leq n$ , Null sonst.

b) **Fejér-Kern:**

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2, & x \in (0, 1) \\ n, & x = 0. \end{cases} \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

Die Fourierkoeffizienten sind  $a_k = 1 - \frac{|k|}{n}$  für  $|k| \leq n-1$ , Null sonst.

c) **Jackson-Kerne:** Für  $r \geq 2$  heißt die Funktion

$$J_n^{(r)}(x) := w_{n,r} \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} \in \mathcal{T}_{r(n-1)}$$

mit

$$w_{n,r}^{-1} := \int_0^1 \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx$$

**Jackson-Kern** der Ordnung  $r$ . In  $x = 0$  erfolgt die stetige Fortsetzung mit  $J_n^{(r)}(0) = n^{2r} w_{n,r}$ .

Man kann den Fejer-Kern auch als 1. Jackson-Kern  $J_n^{(1)}$  auffassen. Abbildung 3.1 zeigt die Graphen der Dirichlet-Kerne, Fejer-Kerne und Jackson-Kerne mit  $r = 2$  und  $n = 2, 5, 10$ .

### 3.23 Eigenschaften.

a) **Symmetrie:** Die Kerne  $D_n$ ,  $F_n$  und  $J_n^{(r)}$  sind gerade:  $K_n(-x) = K_n(x)$

b) **Normierung:** Es gilt

$$\int_0^1 D_n(x) dx = \int_0^1 F_n(x) dx = \int_0^1 J_n^{(r)}(x) dx = 1.$$

Deshalb folgt mit Satz 3.21

$$c_0(f * D_n) = c_0(f * F_n) = c_0(f * J_n^{(r)}) = c_0(f).$$

Die konstanten Funktionen werden also reproduziert.

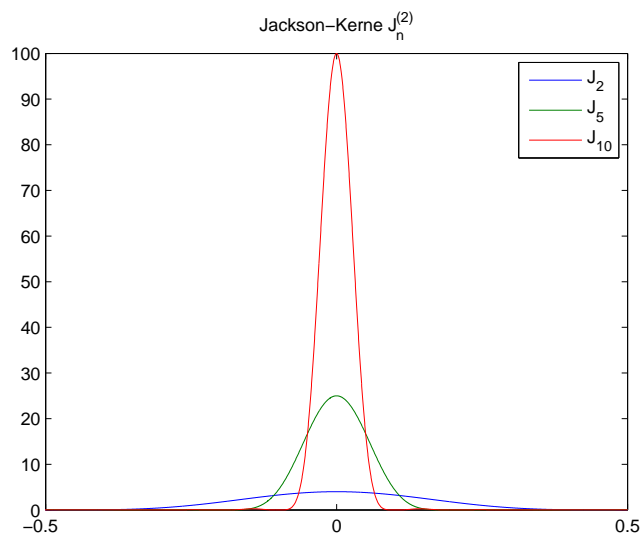
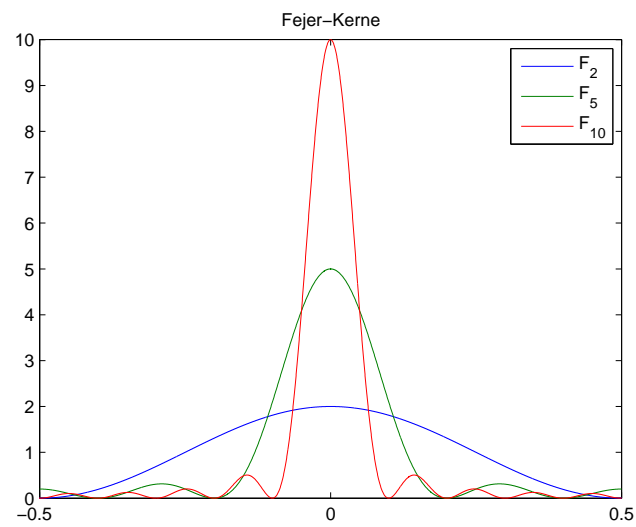
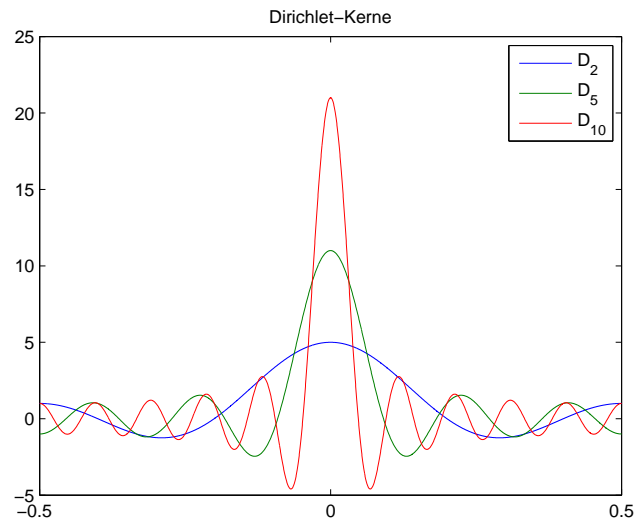


Abbildung 3.1: Wichtige Faltungskerne der Approximationstheorie

c) **absolute Momente:** Für den Fejer-Kern  $F_n = J_n^{(1)}$  und die Jackson-Kerne  $J_n^{(r)}$  mit  $r \geq 2$  gilt

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k |J_n^{(r)}(x)| dx \sim \begin{cases} \frac{1}{n^k}, & 0 \leq k \leq 2r - 2, \\ \frac{\ln n}{n^{2r-1}}, & k = 2r - 1, \\ \frac{1}{n^{2r-1}}, & k \geq 2r. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet  $a_n \sim b_n$ , dass beide Seiten das gleiche asymptotische Verhalten für  $n \rightarrow \infty$  besitzen, dass also Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  existieren mit

$$c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis.** Wir beweisen nur Teil c). Dazu betrachten wir für  $r \geq 1$  den Kehrwert der Normierungskonstanten

$$\omega_{n,r}^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx.$$

Aufgrund der Definition des Fejér-Kerns wissen wir bereits  $\omega_{n,1} = \frac{1}{n}$ . Für  $r \geq 2$  verwenden wir im Nenner des Integranden die Standard-Abschätzung

$$2x \leq \sin \pi x \leq \pi x, \quad x \in [0, 1/2], \quad (3.1)$$

die direkt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt. Weil der Integrand gerade ist, erhalten wir mit der Substitution  $y = nx$

$$\omega_{n,r}^{-1} \sim \int_0^{1/2} \left( \frac{\sin(n\pi x)}{x} \right)^{2r} dx = n^{2r-1} \int_0^{n/2} \left( \frac{\sin(\pi y)}{y} \right)^{2r} dy.$$

Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin(\pi y)}{y} \right)^{2r} dy < \infty, \quad r \geq 1,$$

liefert schließlich

$$\omega_{n,r}^{-1} \sim n^{2r-1}.$$

Ganz analog ergibt sich für  $1 \leq k \leq 2r - 2$  auch

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim n^{2r-k-1},$$

und durch Multiplikation mit  $\omega_{n,r}$  folgt die Behauptung für diese  $k$ . Weiterhin ist für  $k = 2r - 1$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^{2r-1} \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim \int_0^{n/2} \frac{(\sin(\pi y))^{2r}}{y} dy \sim \ln n.$$

Für  $k \geq 2r$  wird schließlich

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k \left( \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim \int_0^{1/2} x^{k-2r} (\sin(n\pi x))^{2r} dx \sim 1.$$

Die Behauptung folgt durch Multiplikation mit  $\omega_{n,r}$ . □

**3.24 Bemerkung.** Die absoluten Momente des Dirichlet-Kerns wurden in 3.23c) nicht angegeben. Die  $L^1$ -Norm, also das 0-te Moment von  $D_n$  hat die Größenordnung  $\ln n$ . Zum Nachweis verwenden wir (3.1), also  $\sin(\pi x) \sim x$  für  $x \in [0, 1/2]$ , und erhalten

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_n(x)| dx \sim \int_0^{1/2} \frac{|\sin \pi(2n+1)x|}{x} dx.$$

Das letzte Integral wird mit der Substitution  $y = (2n+1)x$  zu

$$\int_0^{1/2} \frac{|\sin \pi(2n+1)x|}{x} dx = \int_0^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy.$$

Aufteilen in die Bereiche zwischen den Nullstellen  $k \in \mathbb{Z}$  des Zählers ergibt

$$\int_0^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy + \int_n^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy. \quad (3.2)$$

Der letzte Summand hat die Ordnung  $\mathcal{O}(n^{-1})$ . Die Summe ist wegen der Monotonie des Nenners vergleichbar mit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\sin \pi y| dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Die Größenordnung der Partialsumme der harmonischen Reihe ist bekanntermaßen  $\ln n$ , also folgt die Behauptung. Durch etwas genauere Rechnung zeigt man

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_n(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + \mathbf{O}(1).$$

Mit dem Fejer-Kern können wir nun den Beweis zur Vollständigkeit der Orthonormalbasis von  $L^2(0,1)$  nachholen, vgl. Bemerkung 3.11c). Die Beweistechnik ist typisch für die Approximationstheorie und taucht an mehreren Stellen wieder auf, vgl. die Jackson-Sätze in Kapitel 4 und 5 und die Abschätzungen zum Bernstein-Operator in Kapitel 7.

**3.25 Satz** (Vollständigkeit der ONB). *Die komplexen Exponentialfunktionen  $e_k$  mit  $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , bilden ein **vollständiges** Orthonormalsystem von  $L^2(0,1)$ .*

**Beweis.** Wir beweisen, dass die endlichen Linearkombinationen dicht in  $L^2(0,1)$  sind. Zu  $f \in L^2(0,1)$  bilden wir mit dem Fejer-Kern  $F_n$  das trigonometrische Polynom

$$p_n = f * F_n \in \mathcal{T}_{n-1}$$

und bestimmen zu  $\epsilon > 0$  den Grad  $n - 1$  so, dass  $\|f - p_n\|_2 < \epsilon$  gilt.

Zuerst nutzen wir die Normierung  $\int_{-1/2}^{1/2} F_n(y) dy = 1$  und die Positivität von  $F_n$  in

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x-y)) F_n(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2} |f(x) - f(x-y)| F_n(y) dy. \end{aligned}$$

Nun teilen wir das Integral zu (zunächst) beliebigem  $0 < \delta < 1/2$  auf in einen “Nahbereich” und einen “Fernbereich”

$$I_1(x) := \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)| F_n(y) dy, \quad I_2(x) := \int_{\delta < |y| \leq 1/2} |f(x) - f(x-y)| F_n(y) dy.$$

Mit der einfachen reellen Ungleichung  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  ergibt sich

$$\|f - p_n\|_2^2 \leq \int_0^1 (I_1(x) + I_2(x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 I_1(x)^2 dx + 2 \int_0^1 I_2(x)^2 dx.$$

Den Fernbereich schätzen wir ab, indem wir nur Eigenschaften des Fejer-Kerns verwenden, aber keine speziellen Eigenschaften von  $f$ . Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung ähnlich wie in der  $L^2$ -Abschätzung des Faltungsintegrals in Bemerkung 3.17 erhalten wir

$$\int_0^1 I_2(x)^2 dx \leq \int_0^1 \left( \int_{\delta < |y| \leq 1/2} |f(x) - f(x-y)|^2 F_n(y) dy \int_{\delta < |y| \leq 1/2} F_n(y) dy \right) dx.$$



Der rechte Faktor im Integral wird mit dem 2. absoluten Moment des Fejer-Kerns abgeschätzt zu

$$\int_{\delta < |y| \leq 1/2} F_n(y) dy \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\delta < |y| \leq 1/2} y^2 F_n(y) dy \leq \frac{c}{\delta^2 n}.$$

Die Konstante  $c > 0$  hängt dabei nicht von  $\delta$  oder  $n$  ab. Der Fernbereich hat also die Schranke

$$\begin{aligned} \int_0^1 I_2(x)^2 dx &\leq \frac{c}{\delta^2 n} \int_0^1 \int_{\delta < |y| \leq 1/2} |f(x) - f(x-y)|^2 F_n(y) dy dx \\ &\leq \frac{2c}{\delta^2 n} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (|f(x)|^2 + |f(x-y)|^2) F_n(y) dy dx \\ &= \frac{4c}{\delta^2 n} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde das Doppelintegral mit dem Satz von Fubini und der Normierung von  $F_n$  ausgerechnet.

Für die Abschätzung des Nahbereichs werden wir nun den Parameter  $\delta$  bestimmen, der oben noch frei wählbar war. Die Wahl von  $\delta$  hängt dabei von  $f$  und  $\epsilon$  ab. Wie zuvor ergeben die Cauchy-Schwarz Ungleichung, die Normierung von  $F_n$  und der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^1 I_1(x)^2 dx &\leq \int_0^1 \left( \int_{|y| \leq \delta} |f(x) - f(x-y)|^2 F_n(y) dy \underbrace{\int_{|y| \leq \delta} F_n(y) dy}_{\leq 1} \right) dx \\ &\leq \int_{|y| \leq \delta} \left( \int_0^1 |f(x) - f(x-y)|^2 dx \right) F_n(y) dy. \end{aligned}$$

Mit dem nachfolgenden Lemma können wir  $\delta > 0$  so wählen, dass für das innere Integral

$$\sup_{|y| \leq \delta} \int_0^1 |f(x) - f(x-y)|^2 dx < \epsilon$$

gilt. Damit hat der Nahbereich die obere Schranke

$$\int_0^1 I_1(x)^2 dx < \epsilon \int_{|y| \leq \delta} F_n(y) dy \leq \epsilon.$$

Insgesamt erhalten wir für alle  $n \geq \frac{4c}{\delta^2 \epsilon} \|f\|^2$  die Abschätzung

$$\|f - p_n\|_2^2 < 4\epsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Das angekündigte Lemma formulieren wir sofort für alle  $L^p$ -Räume mit  $1 \leq p < \infty$ . Als Notation verwenden wir die **Translation**  $\tau_y f := f(\cdot - y)$ .

**3.26 Lemma.** *Es sei  $1 \leq p < \infty$ . Für alle  $f \in L^p(0, 1)$  gilt*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|f - \tau_y f\|_p = 0.$$

**Beweis.** Zu  $\epsilon > 0$  können wir eine 1-periodische Treppenfunktion  $g$  wählen mit  $\|f - g\|_p < \epsilon$ . Die Funktion  $g$  hat endlich viele Sprungstellen in  $[0, 1)$  (wir bezeichnen die Anzahl mit  $L \in \mathbb{N}$ ) und ist beschränkt, also  $|g(x)| \leq c$  mit einem  $c > 0$ . Es sei  $y \in (0, 1)$  fest. Eine einfache Überlegung ergibt, dass das Lebesgue-Maß der Menge

$$N_y := \{x \in (0, 1) : g(x) \neq g(x - y)\}$$

höchstens  $L|y|$  beträgt und

$$\|g - \tau_y g\|_p = \left( \int_0^1 \underbrace{|g(x) - g(x - y)|^p}_{\leq (2c)^p} dx \right)^{1/p} \leq 2c(L|y|)^{1/p}.$$

Mit der Minkowski-Ungleichung ist

$$\|f - \tau_y f\|_p \leq \underbrace{\|f - g\|_p}_{\leq \epsilon} + \|g - \tau_y g\|_p + \underbrace{\|\tau_y g - \tau_y f\|_p}_{\leq \epsilon} < 2\epsilon + 2c(L|y|)^{1/p}.$$

Für alle  $|y| < L^{-1} \left(\frac{\epsilon}{2c}\right)^p$  folgt  $\|f - \tau_y f\|_p < 3\epsilon$ . Damit ist der Beweis geführt.  $\square$

Wir wollen noch in allgemeiner Form die drei Kern-Eigenschaften festhalten, die im Beweis von Satz 3.25 wesentlich sind. Der Beweis verläuft analog mit wenigen technischen Ergänzungen. Wir verzichten hier auf die komplette Wiederholung des Beweises.

**3.27 Satz** (zentraler Approximationssatz für Faltungsoperatoren). *Eine Folge von Faltungskernen  $K_n \in L_1(0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , heißt **approximative Einheit**, wenn gilt*

1. **asymptotische Normierung:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(x) dx = 1.$

2. **gleichmäßige Beschränktheit:**  $\int_0^1 |K_n(x)| dx \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

3. **Lokalisierung:** Für jedes  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |K_n(x)| dx = 0.$$

Bilden die Faltungskerne  $K_n$  eine approximative Einheit, so gilt für alle  $1 \leq p < \infty$  und alle  $f \in L^p(0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * K_n\|_p = 0.$$

Die Lokalisierungseigenschaft in Satz 3.27 (3.) ist etwas unhandlich. Sie kann ersetzt werden durch verschiedene Bedingungen, z.B.

3a. die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = 0 \quad \text{für alle } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2},$$

3b. die Bedingung, dass für ein  $k \in \mathbb{N}$  das **absolute Moment**  $k$ -ter Ordnung

$$\mu_k(K_n) := \int_{-1/2}^{1/2} |x|^k |K_n(x)| dx$$

die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k(K_n) = 0$$

erfüllt. Denn dann ist für jedes  $0 < \delta < 1/2$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} |K_n(y)| dy \leq \frac{\mu_k(K_n)}{\delta^k}.$$

Die Fejer-Kerne  $F_n$  und die Jackson-Kerne  $J_n^{(r)}$  mit  $r \geq 2$  bilden also jeweils approximative Einheiten.

**3.28 Bemerkung.** Mit dem Beweis von Satz 3.25 erhalten wir sogar quantitative Fehlerabschätzungen für  $\|f - f * K_n\|$ . Wir skizzieren hier schon einmal die Beweistechnik, die im nächsten Kapitel auftritt. Für den Fernbereich wird ein Moment  $\mu_k$  mit geeignetem  $k$  gewählt (im Beweis war  $k = 2$ ), um eine Fehlerordnung  $\mathcal{O}(n^{-r})$  zu erhalten. Für den Nahbereich ist hingegen die Abschätzung von  $\|f - \tau_y f\|$  maßgeblich. Hierfür sind gewisse Forderungen an die Glattheit von  $f$  zu stellen, um eine entsprechende Fehlerordnung zu erhalten.