

4 Approximation in $C_*[0, 1]$

Im letzten Kapitel haben wir in Bemerkung 3.19 bereits festgestellt, dass die Glattheit einer periodischen Funktion f in engem Zusammenhang zur Approximationsgüte der Fourier-Partialsummen steht, wenn wir den Approximationsfehler in der L^2 -Norm messen. Wir werden diese Untersuchung nun für den Banachraum

$$C_*[0, 1] = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig und 1-periodisch}\}$$

versehen mit der Maximumsnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

fortsetzen. Der Raum $M = \mathcal{T}_n$ der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ soll wieder der Teilraum zur Bestapproximation sein.

Wir werden einerseits Abschätzungen von $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ mit Hilfe gewisser Glattheitsmodule von f angeben. Das sind die sog. Jackson-Sätze, deren Beweis die gleichnamigen Kerne verwendet. Umgekehrt wird das bemerkenswerte Resultat bewiesen, dass aus der Asymptotik des Approximationsgrads $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ für $n \rightarrow \infty$ sogar Schlussfolgerungen auf die Glattheitseigenschaften von f gezogen werden können. Aussagen dieses Typs nennt man “Umkehrsätze” oder Sätze vom “Bernstein-Typ”.

4.1 Bemerkung. Die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1)$ (oder ein anderes halboffenes Intervall $[a, a + 1)$) bestimmt f bereits für alle $x \in \mathbb{R}$, weil f die Periodenlänge 1 besitzt. Die Stetigkeit von f auf ganz \mathbb{R} erfordert $f(0) = f(1)$. Deshalb lässt sich der Definitionsbereich von f auch auffassen als die Menge der Restklassen $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; dies ist topologisch isomorph zur Einheitskreislinie $T = \{e^{2\pi i x} \in \mathbb{C} : 0 \leq x < 1\}$. Eine Umgebung von $x_0 \in \mathbb{T}$ wird dabei identifiziert mit einem kleinen Kreisbogen um $e^{2\pi i x_0}$ auf der Einheitskreislinie. Man beachte, dass \mathbb{T} eine kompakte Menge ist: die δ -Umgebung von $x_0 = 0$ ist $[0, \delta) \cup (1 - \delta, 1)$; mit dieser Beobachtung lässt sich aus jeder offenen Überdeckung von $[0, 1)$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Besser erkennt man die Kompaktheit daran, dass die Einheitskreislinie abgeschlossen und beschränkt (in \mathbb{R}^2) ist.

Zur Übung mache man sich die Umgebung von $x_0 = 0$ sowohl in \mathbb{R} als auch in $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ klar.

Auf dem Raum $C([a, b])$ wird in der Analysis zuweilen der Stetigkeitsmodul

$$\omega(f, t) = \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x \in [a, b-h]} |f(x+h) - f(x)|, \quad 0 < t < b - a,$$

eingeführt. Er liefert eine quantitative Größe zur Unterscheidung zwischen verschiedenen Typen stetiger Funktionen, den sogenannten Lipschitz-Klassen.

4.2 Definition (Lipschitz-Klassen). *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt oder $K = \mathbb{T}$. Für $0 < \alpha \leq 1$ heißt*

$$\text{Lip}_\alpha(K) := \{f \in C(K) : \omega(f, t) = \mathbf{O}(t^\alpha) \text{ für } t \rightarrow 0\}$$

Lipschitz-Klasse der Ordnung α .

Wir werden bald sehen, dass ein Wert $\alpha > 1$ hier keinen Sinn ergibt, weil für jede stetige Funktion f aus $\omega(f, t) = \mathbf{o}(t)$ für $t \rightarrow 0$ folgt, dass f konstant ist.

4.3 Beispiel. Es sei $K = [0, 1]$ und f die (nichtperiodische) stetige Funktion mit $f(x) = \sqrt{x}$. Weil f konkav ist, gilt für $0 < h \leq t < 1$ und $x \in [0, 1 - h]$

$$|f(x+h) - f(x)| = \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \leq \sqrt{h} - \sqrt{0},$$

und damit ergibt sich der exakte Wert $\omega(f, t) = \sqrt{t}$. Also ist $f \in \text{Lip}_{1/2}(K)$, aber f liegt in keiner Lipschitz-Klasse $\text{Lip}_\alpha(K)$ mit $\alpha > 1/2$.

Mit dem gleichen Argument erhalten wir für $0 < \alpha \leq 1$, dass die Funktion g mit $g(x) = x^\alpha$ in $\text{Lip}_\alpha(K)$ liegt, aber in keinem $\text{Lip}_\beta(K)$ mit $\beta > \alpha$. Die Lipschitz-Klassen sind also alle verschieden, es gilt $\text{Lip}_\beta \subset \text{Lip}_\alpha$ für $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

Ein schönes Beispiel ist auch die Funktion h mit $h(x) = x \ln x$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 0$, denn

$$h \in \bigcap_{0 < \alpha < 1} \text{Lip}_\alpha(K), \quad h \notin \text{Lip}_1(K).$$

Wir verallgemeinern nun den Begriff des Stetigkeitsmoduls und verwenden Differenzen höherer Ordnung von f .

4.4 Definition. *Es sei $K = \mathbb{T}$ oder $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall sowie $r \in \mathbb{N}$.*

a) *Für $h > 0$ und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ ist*

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f)(x) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} f(x + jh)$$

die r -te Vorwärts-Differenz von f an der Stelle x .

Speziell für $r = 1$ ist $\Delta_h f(x) := \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$.

b) *Für $t > 0$ und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir*

$$\omega_r(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_\infty = \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x, x+rh \in K} |\Delta_h^r f(x)| \quad (4.1)$$

den r -ten Glattheitsmodul von f zur Schrittweite t .

Bemerkung: Eine Kleinigkeit ist zur Definition von ω_r zu sagen: die Definition verlangt, dass

$$x, x + h, \dots, x + rh \in K$$

im Definitionsbereich von f liegen. Dies ist für periodisches f (also $K = \mathbb{T}$) keine Einschränkung, weil f auf ganz \mathbb{R} definiert ist; für $K = [a, b]$ und (nichtperiodisches) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist allerdings das Supremum nur über $x \in [a, b - rh] =: K(r, h)$ zu bilden.

Eigenschaften der Glattheitsmodule sind in der folgenden Aussage zusammengefasst.

4.5 Lemma. *Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{T}$ oder $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Funktionen f, g seien Elemente von $C(K)$.*

(i) *Es ist $\omega_r(f, t) \geq 0$ für alle $t > 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_r(f, t) = 0$.*

$\omega_r(f, t)$ ist monoton wachsend bzgl. t .

(ii) *$\omega_r(\alpha f, t) = |\alpha| \omega_r(f, t)$ und $\omega_r(f + g, t) \leq \omega_r(f, t) + \omega_r(g, t)$.*

(iii) *Änderung der Schrittweite: $\omega_r(f, nt) \leq n^r \omega_r(f, t)$ für $n \in \mathbb{N}$, und*

$\omega_r(f, \lambda t) \leq \lceil \lambda \rceil^r \omega_r(f, t)$ für reelles $\lambda > 0$.

(iv) *Änderung der Ordnung: $\omega_r(f, t) \leq 2 \omega_{r-1}(f, t) \leq 2^{r-1} \omega_1(f, t) \leq 2^r \|f\|_\infty$.*

(v) *Bei Differenzierbarkeit: $\omega_r(f, t) \leq t \omega_{r-1}(f', t)$ für $f \in C^1(K)$.*

(vi) *Saturation: Aus $\omega_r(f, t) = \mathbf{o}(t^r)$ für $t \rightarrow 0$ folgt $f \in \mathcal{P}_{r-1}$.*

Beweis. (i) und (ii) folgen aus der glm. Stetigkeit von f und der Dreiecksungl.

(iii) Wir verwenden die Operatoren Schreibweise

$$\Delta_h = \tau_h - I, \quad \tau_h f = f(\cdot + h).$$

τ_h ist eine Translation von f und I ist die Identität auf $C(K)$. Damit ist Δ_{nh} die Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \Delta_{nh} &= \tau_{nh} - I \\ &= \tau_{nh} - \tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-1)h} - \tau_{(n-2)h} + \dots + \tau_h - I \\ &= (\tau_h - I) \circ (\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \dots + I). \end{aligned}$$

Wir benötigen die r -te Potenz des Operators Δ_{nh} . Dazu berücksichtigen wir, dass die Operatoren in beiden Klammern kommutieren. Also erhalten wir (wie bei Potenzen kommutierender Matrizen)

$$\Delta_{nh}^r = \Delta_h^r \circ (\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \dots + I)^r = (\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \dots + I)^r \circ \Delta_h^r.$$

Damit ist für jedes $f \in C(K)$

$$\|\Delta_{nh}^r f\|_\infty = \|(\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \dots + I)^r (\Delta_h^r f)\|_\infty \leq \|(\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \dots + I)^r\|_{\text{op}} \|\Delta_h^r f\|_\infty.$$

Mit der Operatornorm $\|\tau_y\|_{\text{op}} = 1$ und der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\|\Delta_{nh}^r f\|_{\infty} \leq n^r \|\Delta_h^r f\|_{\infty}.$$

Insgesamt erhalten wir für den Glattheitsmodul

$$\omega_r(f, nt) = \sup_{0 < h \leq nt} \|\Delta_h^r f\|_{\infty} = \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_{nh}^r f\|_{\infty} \leq n^r \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_{\infty} = n^r \omega_r(f, t).$$

(iv) Die Rekursion $\Delta_h^r = \Delta_h \circ \Delta_h^{r-1} = (\tau_h - I) \circ \Delta_h^{r-1}$ ergibt

$$\|\Delta_h^r f\|_{\infty} \leq \|\tau_h - I\|_{\text{op}} \|\Delta_h^{r-1} f\|_{\infty} \leq 2 \|\Delta_h^{r-1} f\|_{\infty}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(v) Falls f differenzierbar ist, so ist auch die Funktion $g := \Delta_h^{r-1} f$ differenzierbar (klar mittels Ausschreiben von Δ_h^{r-1} als Summe), und es gilt $g' = \Delta_h^{r-1}(f')$. Die Rekursion ergibt also

$$|\Delta_h^r f(x)| = |g(x+h) - g(x)| = \left| \int_0^h g'(x+y) dy \right| \leq h \|g'\|_{\infty} = h \|\Delta_h^{r-1}(f')\|_{\infty}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(vi) Für $r = 1$: Die Voraussetzung $\omega(f, t) = \mathbf{o}(t)$ ergibt sofort

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \quad \text{für alle } x \in K,$$

also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle x , deshalb ist f konstant.

Für $r \geq 2$ ist der Beweis deutlich schwerer, da wir nicht direkt auf die r -fache Differenzierbarkeit von f schließen können.

1. Wir zeigen zuerst, dass aus der Voraussetzung $\omega_r(f, t) = \mathbf{o}(t^r)$ für $t \rightarrow 0$ folgt, dass $\Delta_h^r f \equiv 0$ gilt.

Es sei $t_0 > 0$ beliebig. Die Voraussetzung $\omega_r(f, t) = \mathbf{o}(t^r)$ für $t \rightarrow 0$ besagt, dass eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$\omega_r(f, \frac{t_0}{n}) \leq \varepsilon_n \left(\frac{t_0}{n}\right)^r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit (iii) folgt daraus

$$\omega_r(f, t_0) \leq n^r \omega_r(f, \frac{t_0}{n}) \leq \varepsilon_n t_0^r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die linke Seite hängt nicht von n ab, also gilt

$$\omega_r(f, t_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n t_0^r = 0,$$

und deshalb ist

$$\Delta_h^r f \equiv 0 \tag{4.2}$$

für alle $h > 0$, für die die Menge $K_{r,h}$ nicht leer ist.

2. Es sei $h_1 = (b-a)/r$ (bzw. $h_1 = 1/r$, falls $K = \mathbb{T}$). Das Interpolationspolynom $p_1 \in \mathcal{P}_r$ zu f in den Knoten $x_j := a + jh_1$, $j = 0, \dots, r$, wird mit dem Newton-Schema berechnet. Für die dividierten Differenzen der Ordnung $s \geq 1$ zu diesen Knoten gilt

$$[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+s} | f] = \frac{\Delta_{h_1}^s f(x_j)}{s! h_1^s}.$$

Wegen Teil 1. verschwindet die dividierte Differenz der Ordnung r , also gilt $p_1 \in \mathcal{P}_{r-1}$. Wir zeigen nun $f = p_1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n = (b-a)/(nr)$ sowie p_n das Interpolationspolynom zu f in den Knoten $y_j := a + jh_n$, $j = 0, \dots, nr$. Wegen 1. verschwinden wieder alle dividierten Differenz der Ordnung r und wegen der Rekursion auch alle dividierten Differenzen höherer Ordnung. Also gilt wiederum $p_n \in \mathcal{P}_{r-1}$. Andererseits treten die Knoten $x_j = y_{nj}$ von p_1 auch hier auf, d.h. p_n und p_1 stimmen an den Punkten x_j , $0 \leq j \leq r$, überein. Daraus folgt sofort $p_n = p_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mittels Interpolation haben wir also

$$f(x) = p_1(x) \quad \text{für alle } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a + j(b-a)/(rn) : 0 \leq j \leq rn\}$$

gezeigt. Die Vereinigungsmenge ist dicht in K , also folgt $f = p_1$ aus der Stetigkeit von f . □

Speziell der 2-te Glattheitsmodul spielt eine wichtige Rolle in der Approximationstheorie. Er wird verwendet zur Definition der folgenden Funktionenklasse.

4.6 Definition (Zygmund-Klasse). *Es sei $K = \mathbb{T}$ oder $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt. Der Teilraum*

$$\mathcal{Z} := \{f \in C(K) : \omega_2(f, t) = \mathbf{O}(t) \text{ für } t \rightarrow 0\}$$

heißt Zygmund-Klasse.

4.7 Beispiel. Die Aussagen zu den Glattheitsmodulen $\omega_2(f, t)$ und $\omega(f, t)$ liefern sofort die Relationen

$$\text{Lip}_1 \subset \mathcal{Z} \subset \text{Lip}_\beta \subset \text{Lip}_\alpha \subset C(K)$$

für alle $0 < \alpha < \beta < 1$. Die Teilmengenbeziehungen sind alle "echt". Als Beispiel einer Funktion $f \in \mathcal{Z} \setminus \text{Lip}_1$ dient $f(x) = x \ln x$ mit stetiger Fortsetzung $f(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$ (siehe Übung).

4.8 Bemerkung. Für $f \in C^r(K)$ folgt mit Eigenschaft (v)

$$\omega_{r+1}(f, t) \leq t\omega_r(f', t) \leq \dots \leq t^r\omega_1(f^{(r)}, t).$$

a) Falls zusätzlich für ein $0 < \alpha \leq 1$ noch $f^{(r)} \in \text{Lip}_\alpha$ gilt, so folgt

$$\omega_{r+1}(f, t) \leq t^r\omega(f^{(r)}, t) = \mathbf{O}(t^{r+\alpha}) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

b) Falls $f^{(r)} \in \mathcal{Z}$ gilt, so folgt analog

$$\omega_{r+2}(f, t) \leq t^r\omega_2(f^{(r)}, t) = \mathbf{O}(t^{r+1}) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Wir haben nun mit den Lipschitz-Klassen und der Zygmund-Klasse eine feine Skala von Teilräumen in $C_*[0, 1]$ zur Verfügung, um den Approximationsgrad $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ quantitativ zu erfassen.

4.1 Jackson-Sätze

Wie angekündigt behandeln wir die Bestapproximation von periodischen Funktionen in $C_*[0, 1]$ durch den Raum \mathcal{T}_n der trigonometrischen Polynome. Wir beginnen sofort mit dem ersten Hauptresultat.

4.9 Satz (Jackson, 1912). *Es existiert $C > 0$ so, dass für alle $f \in C_*[0, 1]$ gilt*

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f - p\|_\infty \leq C \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Beweis. Wir erhalten die Aussage durch Faltung von f mit dem Jackson-Kern

$$J_m^{(2)}(x) := w_{m,2} \left(\frac{\sin(m\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^4 \quad \text{mit} \quad w_{m,2}^{-1} := \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\sin(m\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^4 dx,$$

zum Index

$$m = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & , \text{ falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{n+2}{2} & , \text{ falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Denn dann ist $J_m^{(2)} \in \mathcal{T}_n$ und ebenso gilt $f * J_m^{(2)} \in \mathcal{T}_n$. Der Approximationsgrad $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ hat also die obere Schranke $\|f - f * J_m^{(2)}\|_\infty$.

Zur Fehlerabschätzung von $f - \underbrace{f * J_m^{(2)}}_{\in \mathcal{T}_n}$ verfahren wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.25.

Die Normierung von $J_m^{(2)}$ und die Symmetrie ergeben für $x \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} f(x) - (f * J_m^{(2)})(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x-y)) J_m^{(2)}(y) dy \\ &= \int_0^{1/2} \underbrace{(-f(x+y) + 2f(x) - f(x-y))}_{=-\Delta_y^2 f(x-y)} J_m^{(2)}(y) dy. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 (iii) erhalten wir die (bzgl. x gleichmäßige) Abschätzung

$$|\Delta_y^2 f(x-y)| \leq \omega_2(f, y) = \omega_2(f, ny \cdot \frac{1}{n}) \leq (1 + ny)^2 \omega_2(f, \frac{1}{n}).$$

Mit den absoluten Momenten von $J_m^{(2)}$ in 3.23 folgt daraus

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * J_m^{(2)})(x)| &\leq \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) \int_0^{1/2} (1 + ny)^2 J_m^{(2)}(y) dy \\ &\leq \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{c_1 n}{m} + \frac{c_2 n^2}{m^2} \right) \\ &\leq C \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

□

4.10 Bemerkung. Der obige Beweis geht etwas anders vor als der Beweis von Satz 3.25. An die Stelle der Abschätzung für den “Fernbereich” tritt hier die Umrechnung des Glattheitsmoduls zur Schrittweite $y > 1/n$ in den Glattheitsmodul zur festen Schrittweite $1/n$.

Weiterhin sei angemerkt, dass mit der Eigenschaft (iv) des Glattheitsmoduls sofort

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq 2C\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

folgt. Korneichuk zeigte 1962 die genaue Abschätzung

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq \omega\left(f, \frac{1}{2n+2}\right)$$

mit bestmöglicher Konstante 1 vor dem Stetigkeitsmodul zur Schrittweite $1/(2n+2)$. Diese optimale Abschätzung lässt sich aber nicht mit Faltungskernen beweisen, hier sind schwierigere Argumente nötig.

Für die Lipschitz- und Zygmund-Klassen ergeben sich nun die folgenden Aussagen zur asymptotischen Größe des Approximationsgrades.

4.11 Folgerung. a) Ist $f \in \text{Lip}_\alpha$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so gilt $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$.

b) Ist $f \in \mathcal{Z}$, so gilt $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-1})$.

Um einen Approximations-Satz für differenzierbare Funktionen herzuleiten, beschaffen wir uns ein Analogon zum Jackson-Satz 4.9 durch Verwendung von Glattheitsmodulen höherer Ordnung $\omega_r(f, \frac{1}{n})$. Dies gelingt mit ähnlicher Beweistechnik und mit Hilfe des Jackson-Kerns $J_n^{(s)}$, $s = \lceil \frac{r+2}{2} \rceil$. Dabei verwenden wir absolute Momente von $J_n^{(s)}$ der Ordnung $\leq r$; hierbei sind s und r so bestimmt, dass

$$\int_{-1/2}^{1/2} |y|^k J_n^{(s)}(y) dy \leq c_k n^{-k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $k = 0, 1, \dots, 2s-2 \geq r$ gilt, vgl. 3.23.

4.12 Satz. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert $C_r > 0$ mit

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_r \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) \quad \text{für alle } f \in C_*[0, 1].$$

Beweis. 1. Wähle $s = \lceil \frac{r+2}{2} \rceil$ wie oben beschrieben.

2. Wähle m maximal mit $J_m^{(s)} \in \mathcal{T}_n$, also $m-1 = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ (wegen $J_m^{(s)} \in \mathcal{T}_{s(m-1)}$).

3. Wir arbeiten hier nicht mit dem Faltungsoperator $f \mapsto f * J_m^{(s)}$, sondern einer modifizierten Version $T_{m,s}$. Ziel ist es, aus dem Ausdruck $f(x) - (T_{m,s}f)(x)$ ein Integral mit r -ter Differenz von f zu erhalten. Deshalb definieren wir (zunächst rein formal)

$$T_{m,s}f(x) := f(x) - \int_0^1 \Delta_y^r f(x - ry) J_m^{(s)}(y) dy.$$

Es ist klar, dass $T_{m,s} : C_*[0, 1] \rightarrow C_*[0, 1]$ linear ist. Wegen der Normiertheit ($\int J_m^{(s)} = 1$) ergibt sich durch Auflösen des Differenzenoperators die Form

$$T_{m,s}f(x) := - \int_0^1 \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} f(x + (j-r)y) J_m^{(s)}(y) dy.$$

Wichtig daran ist, dass der letzte Summand verschwunden ist, also kein Term $f(x)$ im Integral steht. Für die übrigen Terme wird in Bemerkung 4.13 gezeigt:

$$p_k(x) := \int_0^1 f(x + ky) J_m^{(s)}(y) dy \in \mathcal{T}_n, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dies ergibt also $T_{m,s} : C_*[0, 1] \rightarrow \mathcal{T}_n$ und

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq \|f - T_{m,s}(f)\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C_*[0, 1].$$

4. Die Abschätzung von $\|f - T_{m,s}(f)\|_\infty$ ist nun analog zum Jackson-Satz 4.9:

$$\begin{aligned} |f(x) - (T_{m,s}f)(x)| &= \left| \int_0^1 \Delta_y^r f(x - ry) J_m^{(s)}(y) dy \right| \\ &\stackrel{(4.1)}{\leq} \int_{-1/2}^{1/2} \omega_r(f, y) J_m^{(s)}(y) dy \\ &\leq \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) \int_{-1/2}^{1/2} (1 + n|y|)^r J_m^{(s)}(y) dy \\ &= \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} n^k \int_{-1/2}^{1/2} |y|^k J_m^{(s)}(y) dy. \end{aligned}$$

Die Momente von $J_m^{(s)}$ kürzen gerade die Potenzen n^k , dadurch erhalten wir die Konstante C_r . □

4.13 Bemerkung. Wir liefern das technische Argument in Schritt 3. des vorherigen Beweises. Es sei $f \in C_*[0, 1]$ und $x \in \mathbb{R}$. Für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ gilt:

- Falls k kein Teiler von ℓ ist, so ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x+ky)e^{2\pi i\ell y} dy &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{1/k}^{1+1/k} f(x+k(y-\frac{1}{k}))e^{2\pi i\ell(y-\frac{1}{k})} dy \\
&= e^{-2\pi i\frac{\ell}{k}} \int_{1/k}^{1+1/k} f(x+ky)e^{2\pi i\ell y} dy \quad (f \text{ mit Periode } 1) \\
&\stackrel{\text{Per.}}{=} \underbrace{e^{-2\pi i\frac{\ell}{k}}}_{\neq 1} \int_0^1 f(x+ky)e^{2\pi i\ell y} dy.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Integrationsbereich verschoben, was ja bei voller Periodenlänge 1 erlaubt ist. Also ist

$$\int_0^1 f(x+ky)e^{2\pi i\ell y} dy = 0.$$

- Falls k Teiler von ℓ ist, setze $j = \ell/k \in \mathbb{Z}$. Die Substitution $u = ky$ und Periodizität liefert

$$\int_0^1 f(x+ky)e^{2\pi i\ell y} dy = \frac{1}{k} \int_0^k f(x+u)e^{2\pi iju} du \stackrel{\text{Per. } 1}{=} \int_0^1 f(x+u)e^{2\pi iju} du.$$

Das letzte Integral ist (wie bei der Faltung)

$$\int_0^1 f(t)e^{2\pi ijt(t-x)} dt = e^{-2\pi ijsx} \int_0^1 f(t)e^{2\pi ijt} dt = c_{-j}(f)e^{-2\pi ijsx}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt: für alle $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, und alle $p \in \mathcal{T}_n$ ist

$$g(x) = \int_0^1 f(x+ky)p(y) dy \in \mathcal{T}_n.$$

Die Eigenschaft (v) der Glattheitsmodule liefert das folgende Korollar von Satz 4.12.

4.14 Folgerung. *Es sei $r \in \mathbb{N}$ und*

$$f \in C_*^r[0, 1] = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \in C^r(\mathbb{R}) \text{ ist } 1\text{-periodisch}\}.$$

Dann gilt

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_{r+1} \omega_{r+1} \left(f, \frac{1}{n} \right) \leq \frac{C_{r+1}}{n^r} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right).$$

Weil $f^{(r)}$ gleichmäßig stetig ist, ergibt dies die asymptotische Fehlerordnung $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{o}(n^{-r})$ für $n \rightarrow \infty$.

Ist überdies $f^{(r)} \in \text{Lip}_\alpha$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so gilt

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-r-\alpha}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und ist $f^{(r)} \in \mathcal{Z}$ (Zygmund-Klasse), so gilt

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-r-1}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Der letzte Teil folgt aus

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_{r+2} \omega_{r+2}(f, \frac{1}{n}) \leq \frac{C_{r+1}}{n^r} \omega_2(f^{(r)}, \frac{1}{n}) = \mathbf{O}(n^{-r-1}).$$

Die Aussage zu den Lipschitz-Klassen folgt entsprechend. \square

4.15 Beispiel. Die Funktion $f \in C_*[0, 1]$ mit $f(x) = \sqrt{|\sin \pi x|}$ besitzt die Lipschitz-Ordnung $1/2$, es gilt also $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-1/2})$. Mit dem Remez-Algorithmus (vgl. späteres Kapitel) berechnen wir näherungsweise die Bestapproximationen in \mathcal{T}_n für $n = 1, 2, 4, 8, 16$ und geben den Approximationsgrad $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ in Tabelle 4.1 an. Der Graph der Bestapproximation $p_1 \in \mathcal{T}_1$ sowie die Fehlerfunktion $f - p_1$ sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die gleiche Rechnung wird wiederholt für $g(x) = |\sin \pi x|$ mit der Lipschitz-Ordnung 1 und $h(x) = |\sin \pi x|^{3/2}$, also mit stetiger Ableitung $h' \in \text{Lip}_{1/2}$. Die numerischen Werte stehen ebenfalls in Tabelle 4.1. Sie belegen sehr schön die Abnahmeraten $n^{-\beta}$ mit $\beta = \frac{1}{2}$ für f , $\beta = 1$ für g und $\beta = \frac{3}{2}$ für h .

n	$E_{\mathcal{T}_n}(f)$	$E_{\mathcal{T}_n}(g)$	$E_{\mathcal{T}_n}(h)$
1	0.2362	0.1250	0.0527
2	0.1722	0.0676	0.0210
4	0.1229	0.0347	0.0078
8	0.0871	0.0175	0.0028
16	0.0616	0.0087	0.0010

Tabelle 4.1: Approximationsgrade von $f(x) = |\sin \pi x|^{1/2}$, $g(x) = |\sin \pi x|$ sowie $h(x) = |\sin \pi x|^{3/2}$.

4.2 Umkehrsätze

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass die Approximationsordnung $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ für $f \in \text{Lip}(\alpha)$ (bzw. $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-1})$ für $f \in \mathcal{Z}$) tatsächlich scharf ist. Mit anderen Worten:

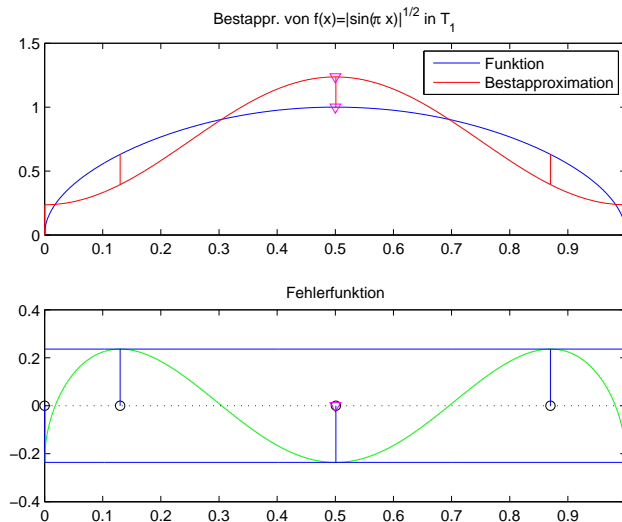


Abbildung 4.1: Bestapproximation in \mathcal{T}_1 von $f(x) = |\sin \pi x|^{1/2}$

Das asymptotische Verhalten des Approximationsgrades für $n \rightarrow \infty$ charakterisiert die Lipschitz-Ordnung von f .

Zum Beweis benötigen wir grundlegende Aussagen für trigonometrische Polynome, wie sie z.B. in der Numerik I stehen.

4.16 Satz. Die Menge \mathcal{T}_n der reell-wertigen trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein Haarscher Raum der Dimension $2n + 1$. D.h. jedes $p \in \mathcal{T}_n$, $p \neq 0$, hat höchstens $2n$ Nullstellen im halboffenen Intervall $[0, 1)$ unter Berücksichtigung der Vielfachheit.

Beweis. Wir setzen $z = e^{2\pi i x} \in \mathbb{C}$. Jedes trigonometrische Polynom $p \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n c_k z^k = z^{-n} \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k.$$

mit Koeffizientenvektor $(c_{-n}, \dots, c_n) \neq 0$. Die letzte Summe stellt ein Polynom $q \neq 0$ vom Grad kleiner oder gleich $2n$ dar, hat also nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens $2n$ komplexe Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheit. Davon liegen höchstens $2n$ auf dem Einheitskreis, also hat p höchstens $2n$ Nullstellen in $[0, 1)$. \square

Wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Polynome vom Grad n lassen sich durch die folgenden zwei Ungleichungen ausdrücken.

4.17 Satz (Bernstein-Ungleichung). Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathcal{T}_n$ gilt

$$\|p'\|_\infty \leq 2\pi n \|p\|_\infty. \quad (4.3)$$

4.18 Bemerkung. Der Differentialoperator $D : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$, $Dp = p'$ ist linear. Weil \mathcal{T}_n endlich-dimensional ist, ist D automatisch beschränkt. Wir verwenden die Maximumsnrm auf $[0, 1]$ und damit die Operatornorm

$$\|D\|_{\text{op}} = \max\{\|p'\|_{\infty} : p \in \mathcal{T}_n, \|p\|_{\infty} = 1\}.$$

Am Beispiel $p(x) = \sin(2\pi nx)$ sieht man, dass die Operatornorm von D mindestens $2\pi n$ ist. Die Bernstein-Ungleichung gibt $\|D\|_{\text{op}} = 2\pi n$ an.

Anstelle der Bernstein-Ungleichung beweisen wir eine etwas schärfere Ungleichung, die sogar punktweise Abschätzungen liefert.

4.19 Satz (Ungleichung von Szegö). Für $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathcal{T}_n$ und $x \in \mathbb{T}$ gilt

$$|p'(x)| \leq 2\pi n \sqrt{\|p\|_{\infty}^2 - |p(x)|^2}. \quad (4.4)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Dazu führen wir die Annahme, es existiere $p \in \mathcal{T}_n$ mit

$$\|p\|_{\infty} < 1, \quad p'(0) = 2\pi n \sqrt{1 - |p(0)|^2}$$

zum Widerspruch. (Hier darf o.B.d.A. angenommen werden, dass die Ungleichung (4.4) bei $x = 0$ verletzt ist, indem auf beiden Seiten der Ungleichung das Argument x verschoben wird. Außerdem darf durch Vorzeichenwahl $p'(0) \geq 0$ angenommen werden.)

1. Wähle $\alpha \in (-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n})$ mit $p(0) = \sin(2\pi n\alpha)$. Dies ist möglich wegen $|p(0)| \leq \|p\|_{\infty} < 1$. Außerdem gilt laut Annahme $p'(0) = 2\pi n \cos(2\pi n\alpha)$.
2. Setze $q(x) = \sin 2\pi n(x + \alpha) - p(x)$, also $q \in \mathcal{T}_n$ mit $q \neq 0$ (weil $\|p\|_{\infty} < 1$) und doppelter Nullstelle

$$q(0) = q'(0) = 0.$$

3. Die Punkte

$$x_k = \frac{(2k+1)}{4n} - \alpha, \quad 0 \leq k \leq 2n-1,$$

sind paarweise verschiedene Punkte in $(0, 1)$. Es sind die Extremalstellen von $\sin 2\pi n(x + \alpha)$, also ist (wiederum wegen $\|p\|_{\infty} < 1$)

$$\text{sign } q(x_k) = \text{sign } \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k, \quad 0 \leq k \leq 2n-1.$$

Dies ergibt mit dem Zwischenwertsatz $2n-1$ Nullstellen von q in $(0, 1)$. Zusammen mit der doppelten Nullstelle in $x = 0$ sind dies $2n+1$ Nullstellen, im Widerspruch zur Haarschen Bedingung. \square

Mit diesen Hilfsmitteln ist es möglich, einen Umkehrsatz zur Approximationsordnung von Funktionen in den Lipschitz-Klassen oder der Zygmund-Klasse zu beweisen. Der Beweis ist sehr trickreich und benutzt verschiedene Argumente der Analysis, unter anderem eine Verdichtung von Reihen wie bei der Konvergenz-/Divergenzanalyse der harmonischen Reihen: falls $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, so gilt

$$2^{k-1}a_{2^k} \leq \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j \leq 2^{k-1}a_{2^{k-1}}, \quad k \geq 1,$$

sowie das Schreiben von p_{2^k} mit Hilfe einer Teleskopsumme.

4.20 Satz. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $M_r > 0$ so, dass für alle $f \in C_*[0, 1]$ und $\delta > 0$

$$\omega_r(f, \delta) \leq M_r \delta^r \sum_{n=0}^{[1/\delta]} (n+1)^{r-1} E_{\mathcal{T}_n}(f)$$

gilt.

Beweis. Es sei $f \in C_*[0, 1]$. Wir schreiben kurz $E_n = E_{\mathcal{T}_n}(f)$ und p_n für das Proximum von f in \mathcal{T}_n .

1. Der Fall $\delta \geq 1$ ist trivial: die Eigenschaften von ω_r ergeben sofort

$$\omega_r(f, \delta) = \omega_r(f - p_0, \delta) \leq 2^r \|f - p_0\| = 2^r E_0.$$

2. Sei nun $0 < \delta < 1$. Die Dreiecksungleichung und weitere Eigenschaften von ω_r ergeben

$$\omega_r(f, \delta) \leq \omega_r(f - p_n, \delta) + \omega_r(p_n, \delta) \leq 2^r \|f - p_n\| + \delta^r \|p_n^{(r)}\| = 2^r E_n + \delta^r \|p_n^{(r)}\| \quad (4.5)$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen nun für die ausgedünnte Folge $n = 2^k$:

$$(i) \quad E_{2^k} \leq r 2^{-rk} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j,$$

$$(ii) \quad \|p_{2^k}^{(r)}\| \leq (2\pi)^r 2^{2r+1} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j.$$

Sodann folgt die Behauptung des Satzes: Die Wahl von $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^k \leq \delta^{-1} < 2^{k+1}$ ergibt sofort $2^{-rk} \geq \delta^r > 2^{-rk-r}$. Einsetzen von $2^{-rk} < 2^r \delta^r$ in (i) ergibt mit $n = 2^k$ in (4.5)

$$\omega_r(f, \delta) \leq 2^r E_{2^k} + \delta^r \|p_{2^k}^{(r)}\| \leq (r 2^{2r} + (2\pi)^r 2^{2r+1}) \delta^r \sum_{j=0}^{[1/\delta]} (j+1)^{r-1} E_j,$$

also die Behauptung mit der Konstanten $M_r = (r + 2(2\pi)^r)2^{2r}$.

Zu Aussage (i): Die Folge $(E_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend. Also ist

$$\sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j \geq E_{2^k} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1}.$$

Die letzte Summe wird abgeschätzt durch

$$\sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} \geq \int_0^{2^k} x^{r-1} dx = \frac{2^{kr}}{r}.$$

Durch Umstellen der Ungleichung folgt Aussage (i).

Zu Aussage (ii): Wegen $p_0^{(r)} = 0$ können wir $p_{2^k}^{(r)}$ als Teleskopsumme

$$p_{2^k}^{(r)} = p_1^{(r)} - p_0^{(r)} + \sum_{j=0}^{k-1} (p_{2^{j+1}}^{(r)} - p_{2^j}^{(r)})$$

schreiben. Anwendung der Dreiecksungleichung und der Bernstein-Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} \|p_{2^k}^{(r)}\| &\leq \|p_1^{(r)} - p_0^{(r)}\| + \sum_{j=0}^{k-1} \|p_{2^{j+1}}^{(r)} - p_{2^j}^{(r)}\| \\ &\leq (2\pi)^r \left(\|p_1 - p_0\| + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j+1)r} \|p_{2^{j+1}} - p_{2^j}\| \right). \end{aligned}$$

Wir schätzen weiter ab mit

$$\|p_{2^{j+1}} - p_{2^j}\| = \|(f - p_{2^j}) - (f - p_{2^{j+1}})\| \leq E_{2^j} + E_{2^{j+1}} \leq 2E_{2^j}$$

und erhalten

$$\|p_{2^k}^{(r)}\| \leq (2\pi)^r \left(E_0 + E_1 + 2 \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j+1)r} E_{2^j} \right) = (2\pi)^r \left(E_0 + (1 + 2^{r+1})E_1 + 2^{2r+1} \sum_{j=1}^{k-1} 2^{(j-1)r} E_{2^j} \right).$$

Die Monotonie der E_j ergibt wie bei der "Reihenverdichtung" für alle $j \geq 1$

$$2^{(j-1)r} E_{2^j} = 2^{(j-1)(r-1)} 2^{j-1} E_{2^j} \leq 2^{(j-1)(r-1)} \sum_{\ell=2^{j-1}+1}^{2^j} E_\ell \leq \sum_{\ell=2^{j-1}+1}^{2^j} (\ell-1)^{r-1} E_\ell,$$

also insgesamt

$$\|p_{2^k}^{(r)}\| \leq (2\pi)^r \left(E_0 + (1 + 2^{r+1})E_1 + 2^{2r+1} \sum_{\ell=2}^{2^{k-1}} (\ell-1)^{r-1} E_\ell \right).$$

Diese Ungleichung ergibt dann die Aussage (ii), indem die Vorfaktoren von E_ℓ durch die einheitliche Form $2^{2r+1}(\ell+1)^{r-1}$ für $\ell \geq 0$ abgeschätzt werden. \square

Wir erhalten die folgenden Folgerungen für die Lipschitz- und Zygmund-Klassen.

4.21 Satz. a) Für $0 < \alpha < 1$ und $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in \text{Lip}(\alpha) \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

b) Für $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in \mathcal{Z} \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-1}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Für beide Aussagen ist die Implikation „ \implies “ der bereits bewiesene Jackson-Satz.

Um die Rückrichtungen zu zeigen, betrachten wir den Stetigkeitsmodul $\omega(f, \delta)$ in a) und den Glattheitsmodul $\omega_2(f, \delta)$ in b) mit $0 < \delta < 1$. Für a) wählen wir $C > 0$ so, dass

$$(n+1)^\alpha E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Dann folgt mit $r = 1$ und der Konstanten M_1 in Satz 4.20

$$\omega(f, \delta) \leq M_1 \delta \sum_{n=0}^{[1/\delta]} E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq M_1 C \delta \sum_{n=0}^{[1/\delta]} (n+1)^{-\alpha}.$$

Die letzte Summe wird wieder durch ein Integral abgeschätzt: Für $0 < \alpha < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{[1/\delta]} (n+1)^{-\alpha} \leq 1 + \int_0^{\delta^{-1}} (1+x)^{-\alpha} dx = 1 + \frac{(1+\delta^{-1})^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq \frac{(2\delta^{-1})^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Damit ergibt sich

$$\omega(f, \delta) \leq M_1 C \delta \frac{(2\delta^{-1})^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{M_1 C 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \delta^\alpha.$$

Also ist $f \in \text{Lip}_\alpha$.

Für b) wählen wir $C > 0$ so, dass

$$(n+1) E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Dann folgt mit $r = 2$ und der Konstanten M_2 aus Satz 4.20

$$\omega_2(f, \delta) \leq M_2 \delta^2 \sum_{n=0}^{[1/\delta]} (n+1) E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq M_2 C \delta^2 (1 + 1/\delta) \leq 2M_2 C \delta.$$

Also ist $f \in \mathcal{Z}$. □

4.22 Bemerkung. Der Beweis der Äquivalenz in Teil a) bricht tatsächlich für $\alpha = 1$ zusammen: die Abschätzung der Summe $\sum_{n=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} (1+n)^{-1}$ führt auf

$$\omega(f, \delta) \leq M' \delta \ln(\delta^{-1}),$$

und der Logarithmus-Term ist unbeschränkt für $\delta \rightarrow 0$. Deshalb kann aus der Abnahmerate $E_{\mathcal{T}_n} = \mathbf{O}(n^{-1})$ **nicht** auf $f \in \text{Lip}_1$ geschlossen werden. Vielmehr wird hierzu die größere Zygmund-Klasse \mathcal{Z} benötigt.

Eine interessante Frage können wir nun beantworten: lässt sich die Zygmund-Klasse vielleicht doch mit Hilfe des 1. Stetigkeitsmoduls definieren?

Einerseits bietet der Beweis von Satz 4.21 (mit der Voraussetzung $E_{\mathcal{T}_n} = \mathbf{O}(n^{-1})$ in b) und mit $r = 1$) die Möglichkeit zu beweisen, dass

$$f \in \mathcal{Z} \implies \omega(f, \delta) = \mathbf{O}(\delta \ln \delta^{-1}) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0.$$

Dies ist offensichtlich schwächer als die Beziehung für Funktionen in Lip_1 , was ja wegen $\text{Lip}_1 \subset \mathcal{Z}$ auch zu vermuten war. Aber auch hier gilt die Umkehrung **nicht**: die Klasse der stetigen Funktionen mit $\omega(f, \delta) = \mathbf{O}(\delta \ln \delta^{-1})$ ist größer als die Zygmund-Klasse. Deshalb mussten wir bei der Definition von \mathcal{Z} auf den Glattheitsmodul ω_2 zurückgreifen.

Für differenzierbare Funktionen gilt der Umkehrsatz entsprechend.

4.23 Satz. a) Für $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ und $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in C_*^k[0, 1] \text{ und } f^{(k)} \in \text{Lip}_\alpha \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-k-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

b) Für $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in C_*^k[0, 1] \text{ und } f^{(k)} \in \mathcal{Z} \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-k-1}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir brauchen wieder nur die Umkehrrichtung „ \Leftarrow “ zu zeigen. Hierfür fassen wir beide Fälle zusammen zu $0 < \alpha \leq 1$ und wählen $C > 0$ mit $n^{k+\alpha} E_k \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Differenzierbarkeit von f : Die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Proxima $p_n \in \mathcal{T}_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f . Wir halten zuerst $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gilt

$$f - p_n = \lim_{j \rightarrow \infty} (p_{2^j n}) - p_n = \sum_{j=0}^{\infty} (p_{2^{j+1}n} - p_{2^j n});$$

insbesondere konvergiert die Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig gegen $f - p_n \in C_*[0, 1]$. Die Reihe der ν -ten Ableitungen, mit $1 \leq \nu \leq k$, wird mit der Bernstein-Ungleichung abgeschätzt zu

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{\infty} (p_{2^{j+1}n}^{(\nu)} - p_{2^j n}^{(\nu)}) \right\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| p_{2^{j+1}n}^{(\nu)} - p_{2^j n}^{(\nu)} \right\| \\
&\leq (2\pi)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1}n)^\nu \|p_{2^{j+1}n} - p_{2^j n}\| \\
&\leq 2(2\pi)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1}n)^\nu E_{\mathcal{T}_{2^j n}}(f) \\
&\leq 2C(4\pi)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} (2^j n)^\nu (2^j n)^{-k-\alpha} \\
&\leq 2C(4\pi)^k \sum_{j=0}^{\infty} (2^j n)^{-\alpha} \\
&= \frac{2C(4\pi)^k}{1 - 2^{-\alpha}} n^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Also konvergieren all diese Reihen ebenfalls gleichmäßig. Die Funktion $f - p_n$ ist daher k -mal stetig differenzierbar und die Ableitungen von $f - p_n$ werden durch gliedweise Differentiation der Reihe erzielt. Damit ist auch f selbst k -mal stetig differenzierbar.

2. Wir haben gerade gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|f^{(k)} - p_n^{(k)}\| \leq \frac{2C(4\pi)^k}{1 - 2^{-\alpha}} n^{-\alpha} = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$$

gilt. Damit erfüllt auch der Approximationsgrad von $f^{(k)}$

$$E_{\mathcal{T}_n}(f^{(k)}) \leq \|f^{(k)} - p_n^{(k)}\| = \mathbf{O}(n^{-\alpha}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Behauptung $f^{(k)} \in \text{Lip}(\alpha)$ bzw. $f^{(k)} \in \mathcal{Z}$ folgt sofort aus Satz 4.21. □

4.24 Beispiel. Im Zusammenhang mit dem Umkehrsatz wollen wir die sog. Weierstraß-Funktion

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $0 < a < 1$, $ab \geq 1$ und ungeradem $b \in \mathbb{N}$ betrachten. Die Funktion ist stetig (Majorantenkriterium) und 1-periodisch. Karl Weierstraß bewies 1886, dass g an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dies widersprach der damaligen Anschauung, dass stetige Funktionen wohl “fast überall” differenzierbar sein müssten. Weierstraß-Funktionen werden heute in erster Linie im Zusammenhang mit fraktalen Mengen untersucht.

Mit Hilfe des Alternantensatzes (Kapitel 6) sieht man, dass das Proximum von g in \mathcal{T}_n gegeben ist durch die Partialsumme

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{k_n} a^k \cos(2\pi b^k x), \quad k_n = [\log_b n].$$

Den Approximationsgrad erhält man durch einfache Rechnung

$$E_{\mathcal{T}_n}(g) = \|g - p_n\|_\infty = \sum_{k=k_n+1}^{\infty} a^k = \frac{a^{k_n+1}}{1-a}.$$

Asymptotisch fällt das Abrunden von $\log_b n$ nicht ins Gewicht, es ist

$$E_{\mathcal{T}_n}(g) \sim a^{\log_b n} = (b^{\log_b a})^{\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b a} = n^{\log_b a}.$$

Man beachte hierzu $-1 \leq \log_b a < 0$ wegen $0 < a < 1 < a^{-1} \leq b$. Der Umkehrsatz liefert nun $g \in \text{Lip}_\alpha$, falls $\alpha = |\log_b a| < 1$ gilt. Weiterhin haben wir für $ab = 1$ (also $|\log_b a| = 1$) eine Funktion $g \in \mathcal{Z}$ gefunden, die an keiner Stelle differenzierbar ist. Dies zeigt wieder eindrucksvoll, dass die Zygmund-Klasse größer ist als Lip_1 : der Satz von Rademacher besagt, dass jedes $f \in \text{Lip}_1$ fast überall differenzierbar ist (also überall mit Ausnahme einer Lebesgue-Nullmenge).

4.3 Weitere Aussagen

Im letzten Beweis wurde schon verwendet, dass die k -te Ableitung des Proximums p_n an f eine gute Approximation an $f^{(k)}$ ist. Als weitere Anwendung der Bernstein-Ungleichung kann man sogar zeigen, dass $p_n^{(k)}$ “fast” so gut wie das Proximum $q_n \in \mathcal{T}_n$ von $f^{(k)}$ ist. Man spricht daher von Simultanapproximation von f durch sein Proximum p_n , da Ableitungen von f automatisch gut approximiert werden.

4.25 Satz. *Zu $r \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $c_r > 0$ so, dass für alle Funktionen $f \in C_*^r[0, 1]$ und ihr Proximum $p_n \in \mathcal{T}_n$ gilt*

$$\|f^{(r)} - (p_n)^{(r)}\| \leq c_r E_{\mathcal{T}_n}(f^{(r)}).$$

Im Buch “Constructive Approximation” von DeVore und Lorentz wird ein knapp verfasster Beweis auf 2 Seiten (206–208) gegeben.

Wir haben bereits in Beispiel 4.7 behauptet, dass es Funktionen $f \in C_*[0, 1]$ gibt, die in keiner Lipschitzklasse Lip_α liegen. Der Umkehrsatz ist ein Mittel, solche Funktionen zu “konstruieren”. Dazu verwendet man folgendes Resultat über “beliebig langsame Approximation”.

4.26 Satz (Lethargie-Theorem von Bernstein). *Zu jeder monoton fallenden Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert $f \in C_*[0, 1]$ mit $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \epsilon_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Es ist dann klar, dass $C_*[0, 1] \setminus \text{Lip}_\alpha$ viele Funktionen enthält: Wahl von $\epsilon_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ oder $\epsilon_n = \frac{1}{\ln \ln \ln(n+20)}$ liefert Funktionen f , für die $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ extrem langsam gegen Null konvergiert, auf jeden Fall langsamer als jedes $n^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$.