

5 Approximation in $C[-1, 1]$

Einige Aussagen zur periodischen Approximation in $C_*[0, 1]$ lassen sich mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \arccos x \in [0, \frac{1}{2}] \quad \longleftrightarrow \quad x = \cos 2\pi\xi \in [-1, 1] \quad (5.1)$$

auf den Raum der stetigen Funktionen $C([-1, 1])$ übertragen. Diese Koordinatentransformation ist stetig, allerdings nicht-linear und auch nicht differenzierbar; insbesondere am Rand des Intervalls $[-1, 1]$ entstehen dadurch Verzerrungen, die eine einfache Übertragung der Ergebnisse aus dem letzten Kapitel nicht erlauben. Wir werden daher Modifikationen der Aussagen zur Approximation behandeln.

Zunächst soll aber der Zusammenhang von $C[-1, 1]$ und $C_*[0, 1]$ erläutert werden. In diesem Abschnitt betrachten wir nur reellwertige Funktionen. Außerdem benötigen wir den Teilraum der **geraden** periodischen Funktionen

$$C_{*,g}[0, 1] = \{\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \tilde{f} \text{ stetig, 1-periodisch und } \tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(1 - \xi).\}$$

5.1 Lemma. a) Die Zuordnung $\Phi : C[-1, 1] \rightarrow C_{*,g}[0, 1]$, die jedem $f \in C[-1, 1]$ mittels der Koordinatentransformation (5.1) die Funktion

$$\tilde{f}(\xi) = f(\cos 2\pi\xi), \quad \xi \in [0, 1],$$

zuordnet, ist bijektiv.

Für die Maximumsnormen gilt $\|\tilde{f}\|_{\infty, [0, 1]} = \|f\|_{\infty, [-1, 1]}$.

b) Φ bildet den Raum der reellwertigen Polynome $p \in \mathcal{P}_n$ bijektiv auf den Raum der geraden reellwertigen trigonometrischen Polynome $\mathcal{T}_n \cap C_{*,g}[0, 1]$ ab.

Beweis. a) Für reellwertiges $f \in C[-1, 1]$ ist \tilde{f} stetig, reellwertig und gerade. Weil jede Funktion $\tilde{f} \in C_{*,g}[0, 1]$ durch die Werte im Intervall $[0, 1/2]$ eindeutig festgelegt ist und die Koordinatentransformation (5.1) von $[0, 1/2]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv ist, ist Φ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\Phi^{-1}(\tilde{f}) = f \quad \text{mit} \quad f(x) = \tilde{f}\left(\frac{\arccos x}{2\pi}\right).$$

b) Die Chebyshev-Polynome T_0, \dots, T_n sind eine Basis von \mathcal{P}_n . Sie sind auf $[-1, 1]$ definiert durch $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. Die Koordinatentransformation (5.1) liefert das trigonometrische Polynom

$$\tilde{T}_k(\xi) = T_k(\cos 2\pi\xi) = \cos(k \arccos(\cos 2\pi\xi)) = \cos(2\pi k\xi)$$

vom gleichen Grad k . □

Sogar die Proxima von $f \in C[-1, 1]$ und von $\tilde{f} \in C_{*,g}[0, 1]$ entsprechen einander.

5.2 Lemma. *Das Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ ist genau dann Proximum der reellwertigen stetigen Funktion $f \in C[-1, 1]$, wenn das zugehörige gerade trigonometrische Polynom $\tilde{p} = \Phi(p) \in \mathcal{T}_n$ Proximum von $\tilde{f} = \Phi(f) \in C_*[0, 1]$ ist.*

Beweis. Wichtig ist vor allem, dass das Proximum $q \in \mathcal{T}_n$ einer geraden periodischen Funktion $\tilde{f} \in C_{*,g}[0, 1]$ auch gerade ist. Dies folgt (wie immer) aus der Eindeutigkeit des Proximums: mit q ist auch die Spiegelung $r(\xi) = q(1 - \xi)$ ein Proximum, die Eindeutigkeit gibt $q = r$, also ist q gerade. Deshalb ist

$$E_{\mathcal{T}_n}(\tilde{f}) = E_{\mathcal{T}_n \cap C_{*,g}[0,1]}(\tilde{f}),$$

mit anderen Worten, das Proximum braucht nur in $\mathcal{T}_n \cap C_{*,g}[0, 1]$ gesucht werden.

Die Bijektion Φ liefert nun die Behauptung, weil für jedes reellwertige $p \in \mathcal{P}_n$

$$\|f - p\|_{\infty,[-1,1]} = \|\Phi(f) - \Phi(p)\|_{\infty,[0,1]}$$

gilt. □

Eine direkte Übertragung der Ergebnisse vom periodischen auf den nichtperiodischen Fall wird aber dadurch schwierig, dass die Bildung von Differenzen zur Schrittweite $0 < h \leq t$ im Stetigkeitsmodul $\omega(\tilde{f}, t)$ nicht mehr mit entsprechenden Differenzen von f übereinstimmt: vielmehr gilt für $\xi \in [0, 1/2]$ und $x = \cos 2\pi\xi$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \cos(2\pi(\xi + \tau)) &= \cos(2\pi\xi) \cos(2\pi\tau) - \sin(2\pi\xi) \sin(2\pi\tau) \\ &= x \cos(2\pi\tau) - \sqrt{1 - x^2} \sin(2\pi\tau) \\ &= x + h_\tau(x) \end{aligned}$$

mit der ‘lokalen Schrittweite’

$$h_\tau(x) = (\cos(2\pi\tau) - 1)x - \sin(2\pi\tau) \sqrt{1 - x^2} \quad \text{an der Stelle } x \in [-1, 1]. \quad (5.2)$$

Deshalb stehen die Differenzen von $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ und $f \in C([-1, 1])$ in der Beziehung

$$\Delta_\tau \tilde{f}(\xi) = \Delta_{h_\tau(x)} f(x), \quad x = \cos 2\pi\xi. \quad (5.3)$$

Diese Verzerrung der Schrittweite durch die nichtlineare Koordinatentransformation (5.1) beeinflusst die Stetigkeits- und Glattheitsmodule. Wir behandeln zwei verschiedene Ansätze, um die Ergebnisse aus $C_*[0, 1]$ dennoch auf $C([-1, 1])$ zu übertragen.

Die Timan-Sätze in Abschnitt 5.1 geben punktweise Fehlerabschätzungen an und verwenden hierbei die lokale Schrittweite $h_\tau(x)$ im Stetigkeitsmodul. Demgegenüber wird von Ditzian und Totik in Abschnitt 5.2 eine Modifikation in der Definition des Stetigkeitsmoduls von $f \in C[-1, 1]$ verwendet, um ähnliche Aussagen wie im Jackson-Satz 4.12 zu erhalten.

5.1 Timan-Sätze

Die Sätze vom Timan-Typ liefern **punktweise** Abschätzungen von Approximationen, die im Allgemeinen nicht durch das Proximum an f , sondern durch die Anwendung linearer Integraloperatoren erzielt werden. Das Besondere an diesen Abschätzungen ist, dass der Parameter $t = \sigma(x)$ der maximalen Schrittweite des Stetigkeitsmoduls $\omega(f, t)$ von der betrachteten Stelle $x \in [-1, 1]$ abhängt. Dadurch wird der Verzerrung, die die Koordinatentransformation bewirkt, geeignet Rechnung getragen. Man beachte im Folgenden, dass $t = \sigma(x)$ kleiner wird, je näher x am Rand des Intervalls liegt. Dadurch werden am Rand kleinere Fehler $|f(x) - p_n(x)|$ erzielt als in der Mitte des Intervalls. Ein entsprechender Umkehrsatz wird ebenfalls formuliert.

Zur Motivation der folgenden Definition betrachten wir die ersten Glieder in der Taylor-Entwicklung der Kosinus- und Sinusfunktion in (5.2). Für kleine Schrittweiten $\tau = \pm \frac{1}{2\pi n}$ ist

$$|h_\tau(x)| = \left| -2\pi^2\tau^2x - 2\pi\tau\sqrt{1-x^2} \right| + \mathbf{O}(\tau^3) \leq \frac{|x|}{2n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \mathbf{O}(n^{-3}).$$

Der Term $\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$ ist dominant in der Intervallmitte, denn für $|x| \leq 1$ ist

$$\frac{|x|}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \iff |x|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{4n^2} + \mathbf{O}(n^{-4}).$$

Deshalb vereinfachen wir die Funktion $h_\tau(x)$ wie folgt.

5.3 Definition. Für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\sigma_n(x) = \max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2} \right\}.$$

5.4 Bemerkung. Die Funktion σ_n ist stetig, hat Knickstellen bei $\pm x_n = \pm(1 - \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$ und ist am Rand des Intervalls (genauer für $1 \geq |x| > x_n$) konstant $\frac{1}{n^2}$. Abbildung 5.1 zeigt den Vergleich der Taylor-Approximation von h_τ mit der Funktion σ_n für $n = 10$. Mit geeigneten positiven Faktoren gilt unabhängig von n

$$c_1\sigma_n(x) \leq \frac{|x|}{2n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \leq c_2\sigma_n(x).$$

Weitere Eigenschaften von σ_n :

1. Es gilt

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq |x - y|. \tag{5.4}$$

Denn das Maximum der stückweise gebildeten Ableitung von σ_n ist die rechtsseitige Ableitung bei $-x_n$, ihr Wert ist $x_n < 1$.

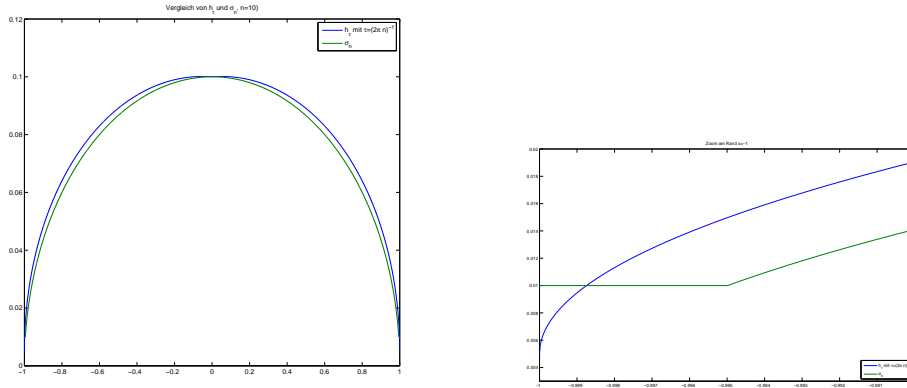


Abbildung 5.1: Vergleich der Taylor-Approximation der lokalen Schrittweite $h_\tau(x)$ mit $\sigma_n(x)$ für $n = 10$ und $\tau = 1/(2\pi n)$

2. Es gilt

$$\sigma_{2n}(x) \leq \frac{1}{2} \sigma_n(x) \leq 2\sigma_{2n}(x). \quad (5.5)$$

Dies besagt ja gerade

$$\max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n}, \frac{1}{4n^2} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n}, \frac{1}{2n^2} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{2n^2} \right\}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen formulieren wir den Satz zur punktweisen Approximation nach Timan (1951). Hierbei wird für den Approximationsfehler $|f(x) - p_n(x)|$ an der Stelle $x \in [0, 1]$ der Stetigkeitsmodul zur Schrittweite $\sigma_n(x)$ verwendet. Das bedeutet grob, dass in der Intervallmitte die üblichen Abschätzungen

$$|f(x) - p_n(x)| \leq C\omega(f, 1/n)$$

gelten, nahe am Rand (für $|x| \geq x_n = (1 - \frac{1}{n^2})^{1/2}$) aber sogar

$$|f(x) - p_n(x)| \leq C\omega(f, 1/n^2)$$

erzielt wird. Die Fehlerabschätzungen werden hier nicht für das Proximum $p_n^* \in \mathcal{P}_{n-1}$ gegeben, sondern für spezielle Polynome p_n , die mit Hilfe des periodischen Jackson-Kerns konstruiert werden.

5.5 Satz. *Es existiert $M > 0$ so, dass es für alle $f \in C[-1, 1]$ Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ gibt mit*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M\omega(f, \sigma_n(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Beweis. Zur periodischen Funktion $\tilde{f}(\xi) = f(\cos(2\pi\xi))$ bildet man

$$\tilde{p}_n = \tilde{f} * J_m = \int_0^1 \tilde{f}(\xi - \tau) J_m(\tau) d\tau$$

mit dem Jackson-Kern $J_m \in \mathcal{T}_{n-1}$, $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wie in Kapitel 4. Weil \tilde{f} und J_m gerade sind, ist auch \tilde{p}_n gerade. Das zugehörige Polynom $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ erfüllt für $x = \cos 2\pi\xi$

$$f(x) - p_n(x) = \tilde{f}(\xi) - \tilde{p}_n(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} (\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi - \tau)) J_m(\tau) d\tau.$$

Im Integral wird jetzt auf den Stetigkeitsmodul von f "umgeschaltet": mit (5.3) erhalten wir

$$|\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi - \tau)| = |f(x) - f(x - h_\tau(x))| \leq \omega(f, |h_\tau(x)|).$$

Weiterhin erhalten wir mit (5.2) sowie $|\cos \tau - 1| = 2 \sin^2(\tau/2) \leq \tau^2/2$

$$\begin{aligned} |h_\tau(x)| &\leq |x(\cos \tau - 1)| + \sqrt{1-x^2} |\sin \tau| \leq \frac{\tau^2}{2} + \sqrt{1-x^2} |\tau| \\ &\leq \left(\frac{n^2 \tau^2}{2} + n|\tau| \right) \max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2} \right\} = \left(\frac{n^2 \tau^2}{2} + n|\tau| \right) \sigma_n(x). \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit den Abschätzungen der Momente von J_m . □

5.6 Folgerung. Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Dann existieren zu $f \in \text{Lip}_\alpha([-1, 1])$ Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \sigma_n(x)^\alpha, \quad x \in [-1, 1].$$

Die Polynome p_n haben also die Approximationsordnung $\mathbf{O}(n^{-\alpha})$ im Inneren des Intervalls und sogar $\mathbf{O}(n^{-2\alpha})$ in den Randpunkten ± 1 .

5.7 Bemerkung. Weitere Aussagen lassen sich für differenzierbare Funktionen $f \in C^r[-1, 1]$ erzielen.

(a) Mit einem Induktions-Argument wird die Existenz von Polynomen $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M_r \sigma_n(x)^r \omega(f^{(r)}, \sigma_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

bewiesen. Dabei ist M_r wieder eine Konstante, die nicht von f , x und n abhängt.

(b) Viel schwieriger war die Konstruktion von Polynomen $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M_r \omega_r(f, \sigma_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

also zum r -ten Glattheitsmodul in Analogie zu Satz 4.12. Erst 1968 gelang dies Yu. Brudnyi¹. Der Fall $r = 2$ wurde bereits vorher von Dzyadyk (1958) und Freud (1959) behandelt. Damit ergab sich in Ergänzung zu Korollar 5.6

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \sigma_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

für alle f aus der Zygmund-Klasse.

Dass der Jackson-Satz in der Form von Timan „scharf“ ist, zeigt der folgende Umkehrsatz.

5.8 Satz. Seien $f \in C[-1, 1]$ und $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein „abstrakter Stetigkeitsmodul“, d.h. w ist stetig, monoton wachsend, erfüllt die Dreiecksungleichung $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$ sowie $\lim_{t \rightarrow 0^+} w(t) = 0$.

Wenn es Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ gibt mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq w(\sigma_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

so folgt für den **globalen** Stetigkeitsmodul von f

$$\omega(f, \delta) \leq M\delta \int_{\delta}^1 w(s)s^{-2} ds \leq M\delta \sum_{n=1}^{[1/\delta]} w\left(\frac{1}{n}\right)$$

für alle $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$. Dabei ist $M > 0$ eine Konstante, die nicht von f , δ oder w abhängt.

Beweis. Die Abschätzung des Integrals durch die Summe ist gültig aufgrund der Monotonie der Funktion w .

Der Beweis verläuft ähnlich zu Satz 4.20. Zuerst wird für $0 < h \leq \delta \leq \frac{1}{4}$ und $x \in [-1, 1 - h]$ die Differenz $\Delta_h f(x)$ betrachtet. Mit $J := [x, x + h]$ und $a := \min_{y \in J} |y|$, $b := \max_{y \in J} |y|$ ist

$$\sigma_k(b) \leq \sigma_k(y) \leq \sigma_k(a) \quad \text{für alle } y \in J. \quad (5.6)$$

Da w monoton wachsend ist, folgt für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\Delta_h f(x)| &= |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq |(f - p_{2^k})(x+h)| + |(f - p_{2^k})(x)| + |p_{2^k}(x+h) - p_{2^k}(x)| \\ &\leq 2w(\sigma_{2^k}(a)) + \delta |p'_{2^k}(y)| \end{aligned} \quad (5.7)$$

mit einem $y \in J$.

Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sigma_{2^{k+1}}(b) < \delta \leq \sigma_{2^k}(b) =: z \quad (5.8)$$

gilt; dies ist wegen $\sigma_2(b) \geq \frac{1}{4} \geq \delta$, der Monotonie von $\sigma_n(x)$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(b) = 0$ möglich. Man beachte, dass auch

$$\delta \leq z \stackrel{(5.5)}{\leq} 4\delta \quad \text{und} \quad z \leq \frac{1}{2}$$

¹ Brudnyi, Yu. A., Approximation of functions by algebraic polynomials. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32, 1968, 780–787 (MR0234175 (38 #2493))

gilt.²

Für den ersten Term in (5.7) verwenden wir die Beziehungen (5.4) und (5.6), also

$$0 \stackrel{(5.6)}{\leq} \sigma_{2^k}(a) - \sigma_{2^k}(b) \stackrel{(5.4)}{\leq} b - a.$$

Zusammen mit (5.8) und $b - a \leq h \leq \delta$ ergibt sich

$$\sigma_{2^k}(a) \leq \sigma_{2^k}(b) + (b - a) \leq 2z.$$

Mit der Monotonie und der Dreiecksungleichung für w wird der erste Term in (5.7) durch

$$2w(\sigma_{2^k}(a)) \leq 2w(2z) \leq 4w(z)$$

und dies weiter durch das Integral

$$4w(z) = \frac{4z}{1-z} \int_z^1 w(z)s^{-2} ds \leq 8z \int_z^1 w(s)s^{-2} ds \leq 32\delta \int_\delta^1 w(s)s^{-2} ds$$

abgeschätzt.

Der wesentliche Teil des Beweises wird wieder die Abschätzung von $p'_{2^k}(y)$ sein.

1. Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $y \in J$ ergeben die Ungleichungen (5.5) und die Dreiecksungleichung für w

$$w(\sigma_{2^j}(y)) \leq w(4\sigma_{2^{j+1}}(y)) \leq 4w(\sigma_{2^{j+1}}(y)). \quad (5.9)$$

Durch das Einschleiben von f folgt aus der Voraussetzung des Satzes

$$|p_{2^{j+1}}(y) - p_{2^j}(y)| \leq 5w(\sigma_{2^{j+1}}(y)), \quad y \in [-1, 1].$$

2. Als Ersatz für die Bernstein-Ungleichung im Beweis von Satz 4.20³ wird Satz 2.3 in Kapitel 8 von [DeVore,Lorentz] verwendet (der Satz geht auf Lebed (1957) und Brudnyi (1959) zurück). Aus der obigen Abschätzung folgt nämlich

$$|(p_{2^{j+1}} - p_{2^j})'(y)| \leq \frac{5C}{\sigma_{2^{j+1}}(y)} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)), \quad y \in [-1, 1],$$

mit einer Konstanten C , die nicht von j und y abhängt.

3. Mit $p_1 \in \mathcal{P}_0$, also $p'_1 = 0$, lässt sich $p'_{2^k}(y)$ als Teleskopsumme schreiben und abschätzen durch

$$\begin{aligned} |p'_{2^k}(y)| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |(p_{2^{j+1}} - p_{2^j})'(y)| \leq 5C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sigma_{2^{j+1}}(y)} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)) \\ &\stackrel{(5.5)}{\leq} 5C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{2^j}(y) - \sigma_{2^{j+1}}(y)}{(\sigma_{2^{j+1}}(y))^2} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)) \stackrel{(5.5)}{\leq} 5C \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\sigma_{2^{j+1}}(y)}^{\sigma_{2^j}(y)} \frac{16}{s^2} w(s) ds \\ &= 80C \int_{\sigma_{2^k}(y)}^{\sigma_1(y)} s^{-2} w(s) dx \stackrel{(5.6)(5.8)}{\leq} 80C \int_\delta^1 s^{-2} w(s) ds. \end{aligned}$$

²Hier ist der erste wesentliche Unterschied zum Beweis von Satz 4.20: δ und 2^k werden nicht direkt, sondern über die Schrittweitenfunktion σ_{2^k} auf dem Intervall J aneinander gekoppelt.

³Hier ist also die zweite wesentliche Abweichung von Satz 4.20.

□

5.9 Folgerung. Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Die Funktion $f \in C[-1, 1]$ ist genau dann in $\text{Lip}_\alpha([-1, 1])$ (für $0 < \alpha < 1$) bzw. \mathcal{Z} (für $\alpha = 1$), wenn Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ existieren mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M\sigma_n(x)^\alpha, \quad x \in [-1, 1].$$

Insgesamt können wir also festhalten, dass die Timan-Sätze die Güte der **punktweisen** Approximation durch algebraische Polynome beschreiben. Durch geeignete lineare Integraloperatoren $L_n : C[-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_n$ wird eine bessere Approximation als

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq C\omega(f, 1/n)$$

an Stellen x erzielt, die nahe am Rand des Intervalls liegen, nämlich

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq C\omega(f, \sigma_n(x)).$$

Damit lassen sich im letzten Korollar die üblichen Lipschitz- bzw. Zygmund-Klassen charakterisieren.

5.10 Bemerkung. Für stetige Funktionen $f \in C[a, b]$ liefert die lineare Koordinatentransformation

$$[-1, 1] \ni x = \frac{2y - a - b}{b - a} \quad \text{für } y \in [a, b]$$

die Funktion $f^*(x) = f(y)$ in $C[-1, 1]$. Für die Approximationsgrade gilt

$$E_{\mathcal{P}_n}(f) = E_{\mathcal{P}_n}(f^*),$$

weil der Polynomraum sowie die Maximumsnorm invariant unter der Koordinatentransformation sind. Die Glattheitsmodule verhalten sich entsprechend der Intervall-Länge zueinander, d.h. es gilt

$$\omega_r \left(f, \frac{(b-a)t}{2} \right) = \omega_r(f^*, t).$$

Dies nutzt man u.a. aus für Fehlerabschätzungen auf kleinen Intervallen $[a, b]$. Für $f \in \text{Lip}_\alpha([a, b])$ mit $\omega(f, u) \leq Lu^\alpha$ (L ist hier eine passende Lipschitz-Konstante von f) wird z.B. aus Satz 5.5

$$\begin{aligned} |f(y) - p_n(y)| = |f^*(x) - p_n^*(x)| &\leq M_1\omega(f^*, \sigma_n(x)) = M_1\omega \left(f, \frac{b-a}{2} \sigma_n(x) \right) \\ &\leq M_1L \left(\frac{b-a}{2} \sigma_n(x) \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit von n und dem Abstand zum Rand des Intervalls steckt weiter im Term $\sigma_n(x)^\alpha$. Zusätzlich wird der Faktor $(\frac{b-a}{2})^\alpha$ erzielt.

Für differenzierbare Funktionen erhalten wir sogar höhere Potenzen $(\frac{b-a}{2})^{r+\alpha}$.

5.2 Sätze von Ditzian und Totik

Eine ganz andere Sichtweise entwickelten Ditzian und Totik, zusammengefasst in ihrem Buch „Moduli of Smoothness“ (Springer, 1987). Hier wird der Stetigkeitsmodul $\omega(f, t)$ für $f \in C[-1, 1]$ durch ein neues Glattheitsmaß ersetzt, das die Verzerrung der Koordinatentransformation (5.1) am Rand berücksichtigt. Im Unterschied zu den Timan-Sätzen entstehen hierdurch scharfe Jackson-Sätze für das **Proximum** an f .

Wir bezeichnen mit

$$\tilde{\Delta}_y f(x) = f\left(x + \frac{y}{2}\right) - f\left(x - \frac{y}{2}\right)$$

die **zentrierte Differenz** zur Schrittweite y .

5.11 Definition. Es sei $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ für $x \in [-1, 1]$. Der **gewichtete Stetigkeitsmodul von Ditzian und Totik** ist definiert als

$$\omega_\varphi(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_x \left| \tilde{\Delta}_{h\varphi(x)} f(x) \right|.$$

Hierbei wird $\tilde{\Delta}_y f(x) = 0$ gesetzt, falls $x + \frac{y}{2}$ oder $x - \frac{y}{2}$ außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ liegen. Der gewichtete Glattheitsmodul r -ter Ordnung wird analog definiert durch

$$\omega_{r,\varphi}(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_x \left| \tilde{\Delta}_{h\varphi(x)}^r f(x) \right|.$$

5.12 Eigenschaften. Der gewichtete Glattheitsmodul hat die folgenden Eigenschaften:

- a) Es gilt $\omega_{r,\varphi}(f, t) \leq \omega_r(f, t)$. Dies folgt unmittelbar aus $\varphi(x) \leq 1$, wenn man die Suprema ausschreibt.
- b) Die Eigenschaften (i), (ii) und (vi) des gewöhnlichen Glattheitsmoduls in Lemma 4.5 gelten entsprechend für $\omega_{r,\varphi}$. Die Begründungen verlaufen ganz ähnlich. Die Eigenschaften (iii)–(v) werden durch kompliziertere Feststellungen ersetzt. Zu (v) formulieren wir dies im nachfolgenden Lemma.
- c) $\omega_\varphi(f, t)$ besitzt bezüglich der Variablen $t > 0$ die „abstrakten“ Eigenschaften eines Stetigkeitsmoduls, die im Umkehrsatz 5.8 formuliert sind: $\omega_\varphi(f, \cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist stetig, monoton wachsend und erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\omega_\varphi(f, t_1 + t_2) \leq \omega_\varphi(f, t_1) + \omega_\varphi(f, t_2).$$

5.13 Lemma. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C_r > 0$ so, dass für alle $f \in C^{r-1}[-1, 1]$ mit absolut-stetigem $f^{(r-1)}$ (d.h. $f^{(r)}$ existiert fast überall und ist integrierbar) die Ungleichung

$$\omega_{r,\varphi}(f, t) \leq C_r t^r \|\varphi^r f^{(r)}\|_\infty, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2r},$$

gilt.

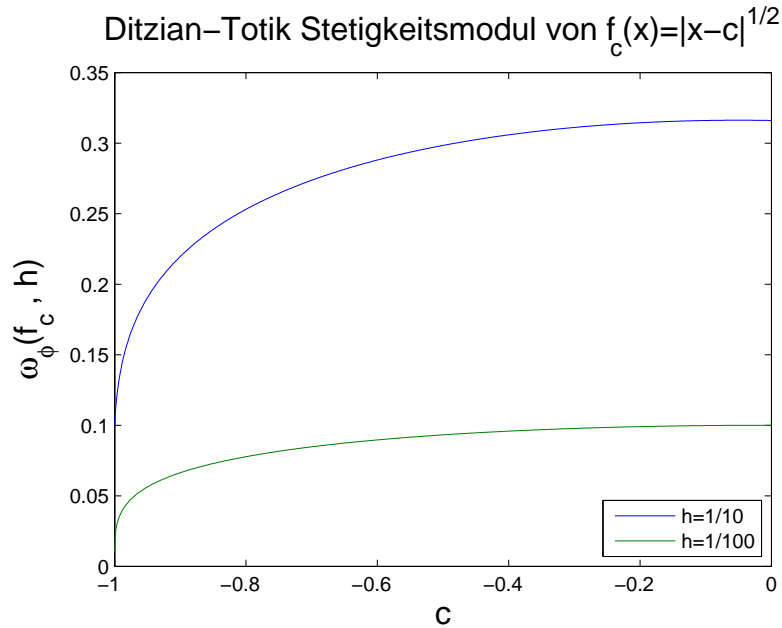


Abbildung 5.2: Größe des Ditzian-Totik Stetigkeitsmoduls $\omega_\varphi(f_c, t)$ von $f_c(x) = |x - c|^{1/2}$ in Abhängigkeit von der Knickstelle c

Der Beweis wurde von Ditzian und Totik erbracht, vgl. DeVore, Lorentz, Kap. 6.6.

5.14 Beispiel. Den wesentlichen Unterschied von ω_φ zum gewöhnlichen Stetigkeitsmodul erkennt man anhand des Beispiels $f_c \in C[-1, 1]$ mit $f_c(x) = |x - c|^\alpha$ mit $c \in [-1, 0]$ und $0 < \alpha \leq 1$.

- a) Der gewöhnliche Stetigkeitsmodul beschreibt die Lipschitzordnung von f_c . Unabhängig vom Shift c gilt $\omega(f_c, t) = t^\alpha$ für alle $0 < t < 1$.
- b) Der gewichtete Stetigkeitsmodul hängt von der Lage der Knickstelle $c \in [-1, 0]$ ab. Je näher die Knickstelle am Rand von $[-1, 1]$ liegt, desto kleiner ist $\omega_\varphi(f_c, t)$, weil die Schrittweite bei der Differenzenbildung zum Rand hin abnimmt. Direktes Nachrechnen ergibt z.B.

$$\omega_\varphi(f_c, t) \approx \begin{cases} t^\alpha & \text{für } c = 0, \\ t^{\min(2\alpha, 1)} & \text{für } c = -1. \end{cases}$$

Die Abbildung 5.2 zeigt die Abhängigkeit von $c \in [-1, 0]$ für die Werte $t = 1/10$ und $t = 1/100$ und für $\alpha = 1/2$. Die Werte wurden mit Matlab berechnet.

Wichtig für die Approximationsaussagen ist der folgende Vergleich von $\omega_\varphi(f, t)$ mit dem gewöhnlichen Stetigkeitsmodul von $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ mit $\tilde{f}(\xi) = f(\cos 2\pi\xi)$.

5.15 Lemma. Für jedes $f \in C[-1, 1]$ und $0 < t < \pi/2$ gilt

$$\omega_\varphi(f, \frac{t}{2}) \leq \omega(\tilde{f}, \frac{t}{2\pi}) \leq \omega_\varphi(f, t).$$

Beweis. Wir schreiben $\omega(\tilde{f}, \frac{t}{2\pi})$ mit zentrierten Differenzen anstatt Vorwärtsdifferenzen. Weil \tilde{f} 1-periodisch und gerade ist, kann die Bildung des Supremums wie folgt eingeschränkt werden,

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{f}, \frac{t}{2\pi}) &= \sup_{0 < h \leq t} \sup_{\xi \in [0, 1]} |\tilde{f}(\xi + \frac{h}{4\pi}) - \tilde{f}(\xi - \frac{h}{4\pi})| \\ &= \sup_{0 < h \leq t} \sup_{\xi \in [\frac{h}{4\pi}, \frac{1}{2} - \frac{h}{4\pi}]} |\tilde{f}(\xi + \frac{h}{4\pi}) - \tilde{f}(\xi - \frac{h}{4\pi})|. \end{aligned}$$

Wir schreiben die Differenz um in eine Differenz bzgl. f

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\xi + \frac{h}{4\pi}) - \tilde{f}(\xi - \frac{h}{4\pi})| &= |f(\cos(2\pi\xi + \frac{h}{2})) - f(\cos(2\pi\xi - \frac{h}{2}))| \\ &= |f(\underbrace{\cos 2\pi\xi \cos \frac{h}{2} - \sin 2\pi\xi \sin \frac{h}{2}}_{=:y}) - f(\cos 2\pi\xi \cos \frac{h}{2} + \sin 2\pi\xi \sin \frac{h}{2})|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wir wollen dies in Bezug setzen zum gewichteten Stetigkeitsmodul von f . Mit $y = \cos 2\pi\xi \cos \frac{h}{2}$ schreiben wir die Differenz in (5.10) deshalb als

$$|f(y + \frac{\tau}{2}\sqrt{1-y^2}) - f(y - \frac{\tau}{2}\sqrt{1-y^2})|$$

zur Schrittweite

$$\tau := \frac{2 \sin 2\pi\xi \sin \frac{h}{2}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Nun folgt eine komplizierte Abschätzung von τ . Es gilt

$$1 - y^2 = 1 - \cos^2 2\pi\xi + \cos^2 2\pi\xi (1 - \cos^2 \frac{h}{2}) = \sin^2 2\pi\xi + \cos^2 2\pi\xi \sin^2 \frac{h}{2}.$$

Wegen $\xi \in [\frac{h}{4\pi}, \frac{1}{2} - \frac{h}{4\pi}]$ ist $0 < \sin \frac{h}{2} \leq \sin 2\pi\xi$, also

$$\sin 2\pi\xi \leq \sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{2} \sin 2\pi\xi.$$

Daraus folgt

$$\sqrt{2} \sin \frac{h}{2} \leq \tau \leq 2 \sin \frac{h}{2}.$$

Weiter folgt aus $h \leq t < \frac{\pi}{2}$ mit der Standard-Abschätzung $\frac{a}{\sqrt{2}} \leq \sin a \leq a$ für $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\frac{h}{2} \leq \tau \leq h.$$

Nehmen wir nun die Supremums-Bildung wieder auf, so erhalten wir direkt die Behauptung. \square

Die Verwendung des gewichteten Stetigkeitsmoduls für $f \in C[-1, 1]$ erlaubt also die direkte Übertragung von Approximationsaussagen aus $C_*[0, 1]$. Zunächst führen wir die neuen Lipschitz-Klassen

$$\text{Lip}_{\varphi, \alpha} = \{f \in C[-1, 1]; \omega_{\varphi}(f, t) = \mathbf{O}(t^{\alpha}) \text{ für } t \rightarrow 0\}$$

mit $0 < \alpha \leq 1$ ein. Die Eigenschaft 5.12a) besagt $\text{Lip}_{\alpha} \subset \text{Lip}_{\varphi, \alpha}$. Wichtiger ist die Folgerung aus Lemma 5.15, dass

$$f \in \text{Lip}_{\varphi, \alpha} \iff \tilde{f} \in \text{Lip}_{\alpha}$$

gilt. Zur Bestapproximation mit algebraischen Polynomen gelangen nun die folgenden Aussagen.

5.16 Satz (Ditzian, Totik, 1987). *Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $M_r > 0$ so, dass für alle $f \in C[-1, 1]$*

$$E_{\mathcal{P}_n}(f) \leq M_r \omega_{r, \varphi}\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq r,$$

gilt.

Weiterhin gilt für $0 < \alpha < r$ die Äquivalenz

$$E_{\mathcal{P}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty \iff \omega_{r, \varphi}(f, t) = \mathbf{O}(t^{\alpha}) \text{ für } t \rightarrow 0.$$

Für $r = 1$ folgen die Aussagen direkt aus den entsprechenden Sätzen für Funktionen in $C_*[0, 1]$. Genaue Beweise für $r > 1$ findet man im Buch von DeVore und Lorentz, Kap. 8.7.

5.17 Folgerung. *Für $0 < \alpha < 1$ gilt*

$$f \in \text{Lip}_{\varphi, \alpha} \iff E_{\mathcal{P}_n}(f) = \mathbf{O}(n^{-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

5.18 Beispiel. Wir greifen nochmals die Funktionen $f_c(x) = |x - c|^{1/2}$ aus Beispiel 5.14 auf. Die Proxima vom Grad $n = 10$ werden für $c = 0$ (Abb. 5.3) und für $c = -1$ (Abb. 5.4) dargestellt. An der y -Achse der Fehlerfunktion liest man ab, dass der Approximationsgrad $E_{\mathcal{P}_n}(f_{c=-1})$ ungefähr dem Quadrat des Approximationsgrads $E_{\mathcal{P}_n}(f_{c=0})$ entspricht. Dies passt genau zur Größe des gewichteten Stetigkeitsmoduls in Abbildung 5.2.

5.19 Beispiel. Abschließend vergleichen wir nochmals die Aussagen der letzten beiden Abschnitte anhand der Funktionen $f_c(x) = |x - c|^{1/2}$ mit dem Shift-Parameter $c \in [-1, 0]$. Im Fall $c = 0$ liegt die Knickstelle von f_c in der Intervallmitte.

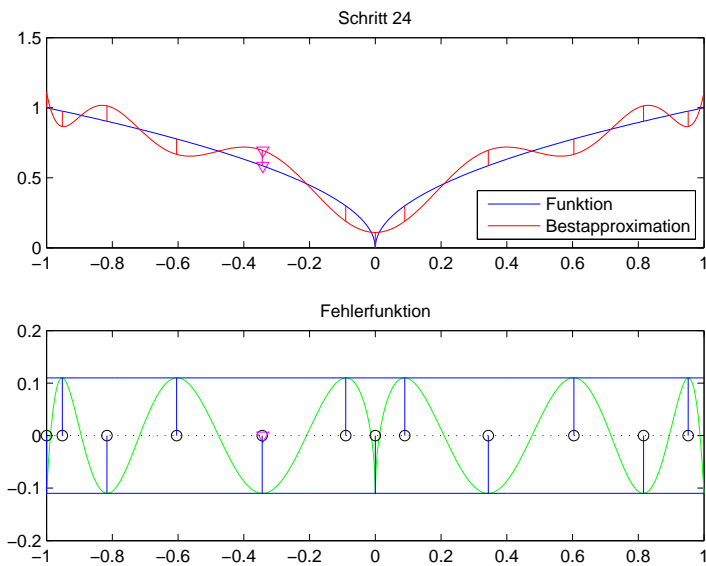


Abbildung 5.3: Bestapproximation von $f_0(x) = |x|^{1/2}$ durch Polynome vom Grad 10 (oben) und die Fehlerfunktion (unten)

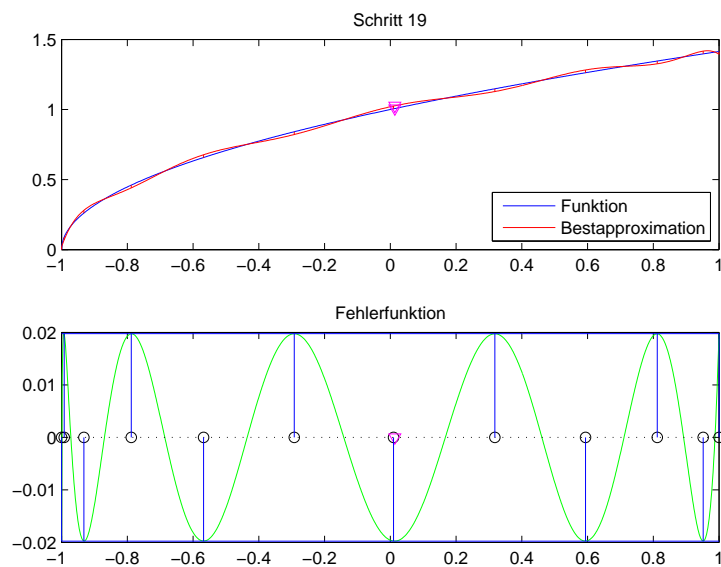


Abbildung 5.4: Bestapproximation von $f_{-1}(x) = |x + 1|^{1/2}$ durch Polynome vom Grad 10 (oben) und die Fehlerfunktion (unten)

- In Satz 5.5 wird ein trigonometrisches Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ konstruiert, das die punktweise Fehlerabschätzung

$$|f_0(x) - p_n(x)| \leq M\omega(f_0, \sigma_n(x)) = M \left(\max \left(\frac{1}{n^2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) \right)^{1/2}$$

erfüllt. Diese Abschätzung liefert die globale Fehlerordnung $n^{-1/2}$, aber sogar n^{-1} am Rand des Intervalls.

- Satz 5.16 zeigt für das Proximum $p_n^* \in \mathcal{P}_n$

$$\|f_0 - p_n^*\|_\infty \leq M\omega_\varphi \left(f_0, \frac{1}{n} \right) = Mn^{-1/2}.$$

Die Fehlerfunktion in Abbildung 5.4 hat die Ordnung $n^{-1/2}$ sowohl in der Mitte als auch am Rand des Intervalls.

In diesem Fall liefert der Satz von Timan also ein Polynom p_n , das nahe am Rand des Intervalls besser approximiert als das Proximum p_n^* .

Im Fall $c = -1$ liegt die Knickstelle von f_c am Rand des Intervalls.

- Die Aussage in Satz 5.5 ist genau die gleiche wie für $c = 0$, da der globale Stetigkeitsmodul von f_0 und f_{-1} gleich groß ist. Wir erhalten also die globale Fehlerordnung $n^{-1/2}$ und sogar n^{-1} am Rand des Intervalls.
- Satz 5.16 ergibt für das Proximum $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ die Fehlerordnung

$$\|f_{-1} - p_n^*\|_\infty \leq M\omega_\varphi \left(f_{-1}, \frac{1}{n} \right) \sim n^{-1},$$

also die globale Fehlerordnung n^{-1} .

In diesem Fall hat das Proximum also im gesamten Intervall die bessere Approximationsordnung.

Wir können dies noch kompakter ausdrücken: Der Ditzian-Totik Stetigkeitsmodul von f_c hat die Größenordnung $\omega_\varphi(f_c, 1/n) \sim \sigma_n(c)$. Die Konstruktion in Satz 5.5 liefert also nur für $-1 < x < c$ eine mögliche Verbesserung gegenüber dem Proximum p_n^* in Satz 5.16.

5.3 Markov- und Bernstein-Ungleichungen

Für trigonometrische Polynome auf $\mathbb{T} \simeq [0, 1)$ wurden die Bernstein-Ungleichung

$$\|\tilde{p}'\|_\infty \leq 2\pi n \|\tilde{p}\|_\infty, \quad \tilde{p} \in \mathcal{T}_n,$$

und die Ungleichung von Szegö

$$|\tilde{p}'(x)| \leq 2\pi n \sqrt{\|\tilde{p}\|_\infty^2 - (\tilde{p}(x))^2}, \quad \tilde{p} \in \mathcal{T}_n, \quad x \in \mathbb{T},$$

gezeigt. Solche Typen von Ungleichungen sind bedeutsam z.B. zum Vergleich verschiedener Normen, wie den Sobolev-Normen. Für algebraische Polynome auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ gilt ein Analogon zur Bernstein-Ungleichung, allerdings mit dem Faktor n^2 anstatt $2\pi n$. Dass diese Konstante bestmöglich ist, zeigt schon das Tschebyscheff-Polynom $T_n \in \mathcal{P}_n$ mit $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, denn mit $\xi = \arccos x$ ist

$$|T_n'(x)| = \frac{n |\sin(n\xi)|}{|\sin(\xi)|} \leq n^2, \quad T_n'(1) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{n \sin(n\xi)}{\sin(\xi)} = n^2.$$

5.20 Satz (Markov-Ungleichung). *Für alle $p \in \mathcal{P}_n$ gilt*

$$(a) \|p'\|_{\infty, [-1, 1]} \leq n^2 \|p\|_{\infty, [-1, 1]},$$

$$(b) |p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{\infty, [-1, 1]} \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Beweis. Teil (b) folgt direkt aus der Bernstein-Ungleichung für $\tilde{p}(\xi) = p(\cos \xi)$ (also $p(x) = \tilde{p}(\arccos x)$), denn mit $\xi = \arccos x$ ist

$$|p'(x)| = \frac{|\tilde{p}'(\xi)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|\tilde{p}\|_{\infty, \mathbb{T}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{\infty, I}.$$

Teil (a) wird indirekt bewiesen.

Annahme: Es gibt $p \in \mathcal{P}_n$ mit $\|p\|_I < 1$ und $\|p'\|_I = p'(x^*) = n^2$. O.B.d.A. sei $x^* \geq 0$.

1. Zeige $x^* > \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$ größte Nullstelle des Tschebyscheff-Polynoms T_n .

Sonst wäre

$$\sqrt{1-(x^*)^2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$$

und Teil (b) würde liefern

$$n^2 = p'(x^*) \leq n^2 \|p\| < n^2, \quad \text{Widerspruch.}$$

2. Zeige $|p(x^*)| < T_n(x^*) = \cos(2\pi n \xi^*)$ mit $\xi^* = \frac{1}{2\pi} \arccos(x^*)$.

Für $x^* = 1$ folgt dies aus $\|p\| < 1 = T_n(1)$. Also braucht nur der Fall $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) < x^* < 1$ (also $0 < \xi^* < \frac{1}{4n}$) betrachtet werden.

Wäre $|p(x^*)| \geq T_n(x^*)$, so würde mit $\tilde{p}(\xi) = p(\cos(2\pi\xi))$ und

$$\|\tilde{p}\| < 1, \quad |\tilde{p}'(\xi^*)| = |p'(x^*)| \geq T_n(x^*) = \cos(2\pi n \xi^*)$$

aus der Ungleichung von Szegö folgen

$$\begin{aligned}
n^2 |\sin(2\pi\xi^*)| &= |p'(x^*) \sin(2\pi\xi^*)| = \frac{1}{2\pi} |\tilde{p}'(\xi^*)| \\
&\leq n \sqrt{\|\tilde{p}\|_\infty^2 - (\tilde{p}(\xi^*))^2} \\
&< n \sqrt{1 - \cos^2(2\pi n\xi^*)} \\
&= n |\sin(2\pi n\xi^*)| \leq n^2 |\sin(2\pi\xi^*)|, \quad \text{Widerspruch.}
\end{aligned}$$

3. Wir leiten nun den Widerspruch zu den Annahmen über p her. Setze $q := T_n - p \in \mathcal{P}_n$, $q \neq 0$ (wegen $\|p\| < 1$). An den **Extremalstellen** $y_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ von T_n (beachte $y_0 = 1 > y_1 > \dots > y_n = -1$) gilt

$$\text{sign } T_n(y_k) = \text{sign } q(y_k) = (-1)^k.$$

Also hat q genau n Nullstellen $x_k \in (y_{k+1}, y_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.

Nach dem Satz von Rolle hat q' jeweils eine Nullstelle $\xi_k \in (x_{k+1}, x_k)$, $0 \leq k \leq n-2$. Weitere Nullstellen von q oder q' gibt es nicht (Fundamentalsatz der Algebra); insbesondere folgt aus $q(1) > 0$ sofort $q(x) > 0$ für alle $x > x_0$ und $q'(x) > 0$ für alle $x > \xi_0$.

Wir haben in 1. und 2. gezeigt, dass

$$1 \stackrel{1.}{=} \text{sign } T_n(x^*) \stackrel{2.}{=} \text{sign } q(x^*) \quad \text{und} \quad x^* > y_1$$

gilt, also ist $1 \geq x^* > x_0 > \xi_0$. Damit gilt $q'(x^*) > 0$. Andererseits folgt aus $\|T_n'\| \leq n^2$ $q'(x^*) = T_n'(x^*) - n^2 \leq 0$, also ein Widerspruch. \square

Für die Aussagen zum **gewichteten** Stetigkeitsmodul passt die folgende Bernstein-Ungleichung:

Bei Verwendung der Gewichtsfunktion $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ in der Bestimmung der Maximumnorm auf $[-1, 1]$ erhält man, wie bei trigonometrischen Polynomen, die Konstante n (an Stelle von n^2 in der Markov-Ungleichung). Die Aussage wird sofort für höhere Ableitungen formuliert.

5.21 Satz (Bernstein-Ungleichung). *Es sei $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in I = [-1, 1]$. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C_r > 0$ so, dass für alle $n \geq r$ und $p \in \mathcal{P}_n$ gilt*

$$\|\varphi^r p^{(r)}\|_{\infty, [-1, 1]} \leq C_r n^r \|p\|_{\infty, [-1, 1]}.$$