7 Der Bernstein-Operator und die Sätze von Weierstraß und Korovkin

[6]

Wir betrachten nun praktisch relevante Methoden der Approximation durch Polynome. Hier steht nicht mehr die Bestapproximation im Vordergrund. Stattdessen werden lineare Approximations-Verfahren mit zusätzlichen Eigenschaften (z.B. Erhaltung von Monotonie) verwendet, die z.B. in der grafischen Datenverarbeitung eine wichtige Rolle spielen.

7.1 Definition.

a) *Für $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$ heißt*

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

Bernstein-Grundpolynom *vom Grad n.*

Zusätzlich definieren wir $p_{0,0} \equiv 1$ sowie $p_{n,k} \equiv 0$ für $k > n$ oder $k < 0$.

b) *Für $n \geq 1$ heißt der lineare Operator $B_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$ mit ist gegeben durch*

$$B_n f := B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}.$$

Bernstein-Operator *vom Grad $n \in \mathbb{N}$.*

7.2 Eigenschaften. Die Bernstein-Grundpolynome besitzen die folgenden Eigenschaften:

a) Die Menge $\{p_{n,k} : 0 \leq k \leq n\}$ bildet für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} p_{n,0} \\ \vdots \\ p_{n,n} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

mit den Monomen e_k und der regulären oberen Dreiecksmatrix $T = (t_{jk})_{i,j=0,\ldots,n}$,

$$t_{jk} = (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{n}{k}, \qquad k \geq j.$$

b) Für alle $x \in [0,1]$ ist $p_{n,k} \geq 0$, für $x \in (0,1)$ sogar $p_{n,k}(x) > 0$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1. \qquad \text{(TeilungderEins)}$$

[6] Sergei Natanowitsch Bernstein, russischer Mathematiker 1880-1968; Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, deutscher Mathematiker 1815-1897; Pavel Korovkin, russischer Mathematiker, 1913-1985

c) **Endpunkte**: Es gilt $p_{n,k}(0) = \delta_{0,k}, \quad p_{n,k}(1) = \delta_{n,k}$.

d) **Symmetrie**: Es gilt $p_{n,k}(x) = p_{n,n-k}(1-x)$.

e) **Rekursion**: Es gilt

$$p_{n,k}(x) = (1-x)\, p_{n-1,k}(x) + x\, p_{n-1,k-1}(x).$$

f) **Rekursion der Ableitung**: Es gilt

$$p'_{n,k}(x) = n\,(p_{n-1,k-1} - p_{n-1,k}).$$

Das Polynom $p_{n,k}$ nimmt auf dem Intervall $[0,1]$ sein globales Maximum an der Stelle $\frac{k}{n}$ an, ist monoton wachsend in $[0,\frac{k}{n}]$ und monoton fallend in $[\frac{k}{n},1]$.

7.3 de Casteljau-Algorithmus. Die Rekursion 7.2(e) wird zur Auswertung eines Polynoms

$$p = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{n,k}$$

an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ verwendet. Für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{k=0}^{n} b_k\, p_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, \left((1-t)\, p_{n-1,k}(t) + t\, p_{n-1,k-1}(t)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{((1-t)b_k + tb_{k+1})}_{=b_k^{(1)}(t)}\, p_{n-1,k}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(t)\, p_{n-1,k}(t) = \dots \\
&= b_0^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

mit den rekursiv definierten “Koeffizienten”

$$b_k^{(m)}(t) = (1-t)b_k^{(m-1)}(t) + tb_{k+1}^{(m-1)}(t), \qquad b_k^{(0)}(t) = b_k. \tag{7.1}$$

Diesen Algorithmus versteht man am besten in der Version für parametrische Kurven, wobei $b_k \in \mathbb{R}^2$ Vektoren sind, die sog. Kontrollpunkte der Kurve $p : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Für $t \in [0,1]$ definiert die Rekursion (7.1) den Punkt $b_k^{(m)}(t)$ auf der Verbindungsstrecke der Punkte $b_k^{(m-1)}(t)$ und $b_{k+1}^{(m-1)}(t)$. Dies ist im Fall $n = 3$ dargestellt in Abbildung 7.1. Schließlich ist $p(t) = b_0^{(n)}(t)$ der zu bestimmende Punkt der Kurve. (Weitere Eigenschaft: die Tangente in diesem Punkt ist $p'(t) = n(b_1^{(n-1)}(t) - b_0^{(n-1)}(t))$.)
Dieser Algorithmus ist numerisch extrem stabil, da nur Konvex-Kombinationen von Punkten gebildet werden. Damit ist bereits bewiesen, dass die Punkte $p(t)$ der Kurve in der konvexen Hülle der “Kontrollpunkte” b_k liegen.

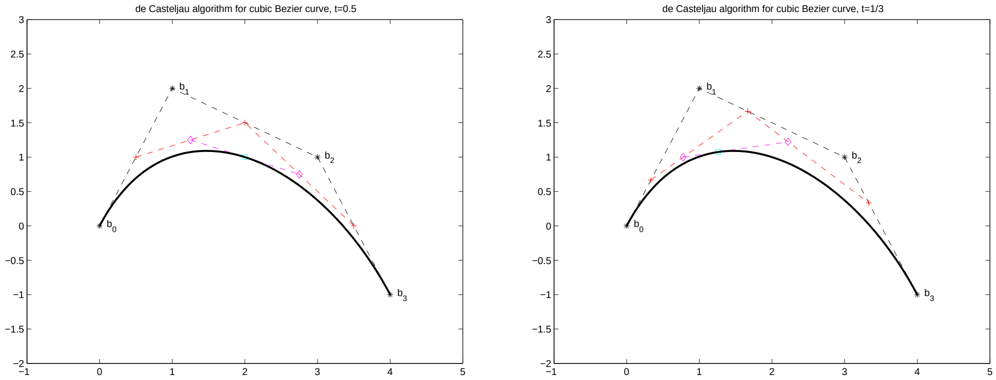

Abbildung 7.1: de Casteljau-Algorithmus für eine kubische Kurve; Auswertung bei $t = 1/2$ (links) und $t = 1/3$ (rechts)

Als Vorbereitung zu den Approximationsaussagen beweisen wir noch folgende Eigenschaft.

7.4 Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\binom{k}{j} = 0$, falls $j < 0$ oder $j > k$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist dann*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} p_{n,k}(x) = \binom{n}{m} x^m.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} p_{n,k}(x) &= \sum_{k=m}^{n} \underbrace{\binom{k}{m}\binom{n}{k}}_{=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \binom{n}{m} x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} x^{k-m} (1-x)^{(n-m)-(k-m)} \\
&= \binom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} x^k (1-x)^{n-m-k} \\
&= \binom{n}{m} x^m \underbrace{(x + (1-x))^{n-m}}_{=1}.
\end{aligned}$$

$\square$

7.5 Eigenschaften. Der Bernstein-Operator $B_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) B_n ist linear, seine Operatornorm ist

$$\|B_n\|_{\text{op}} = \sup\{\|B_n f\|_{\infty,[0,1]} : f \in C[0,1],\ \|f\|_\infty = 1\} = 1.$$

Denn mit den Eigenschaften der $p_{n,k}$ folgt für $x \in [0,1]$

$$|B_n f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\le 1} p_{n,k}(x) \le 1.$$

b) **Endpunktinterpolation**: Es gilt

$$\begin{aligned} B_n f(0) &= f(0) \qquad (\text{wegen } p_{n,k}(0) = \delta_{k,0}), \\ B_n f(1) &= f(1) \qquad (\text{wegen } p_{n,k}(1) = \delta_{k,n}). \end{aligned}$$

c) **Reproduktion linearer Polynome**: Es gilt

$$B_n e_0(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1, \qquad B_n e_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, p_{n,k}(x) = x,$$

also $B_n p = p$ für alle $p \in \mathcal{P}_1$. (Nachweis mit Lemma 7.4)

Für $e_2(x) = x^2$ erhalten wir mit Lemma 7.4 außerdem

$$B_n e_2(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \tag{7.2}$$

d) **Positivität**:

- Für $f \geq 0$ (das heißt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$) ist $B_n f \geq 0$ auf $[0,1]$. Dies ist (wegen der Linearität von B_n) gleichbedeutend mit
- Aus $g \geq f$ folgt $B_n g \geq B_n f$ auf $[0,1]$.

e) **Ableitungen und Gestalt-Erhaltung:** Es gilt

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{=\Delta_{\frac{1}{n}} f(\frac{k}{n})} p_{n-1,k}(x),$$

und für höhere Ableitungen $1 \leq \ell \leq n$

$$\frac{d\ell}{dx^\ell}(B_n f)(x) = \frac{n!}{(n-\ell)!} \sum_{k=0}^{n-\ell} \Delta^\ell_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\, p_{n-\ell,k}(x)$$

mit den Differenzen ℓ-ter Ordnung

$$\Delta_h^\ell f(y) = \Delta_h(\Delta_h^{\ell-1} f)(y) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} f(y+jh).$$

Insbesondere:

- Falls f monoton wächst (oder fällt), so ist auch $B_n f$ monoton wachsend (bzw. fallend).
- Falls f konvex (oder konkav) ist, so ist auch $B_n f$ konvex (bzw. konkav).

Für die Aussagen zur Approximation auf $C[0,1]$ verwenden wir die Momente des Bernstein-Operators. Diese werden dann ganz ähnlich wie in den Ergebnissen zum Fejer- und Jackson-Kern eingesetzt.

7.6 Lemma (Momente des Bernstein-Operators)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0,1]$ sei*

$$T_{n,s}(x) = B_n\left[(\cdot - x)^s\right](x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^s p_{n,k}(x).$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
T_{n,0}(x) &= 1, \qquad T_{n,1}(x) = 0,\\
T_{n,2}(x) &= \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n},\\
T_{n,3}(x) &= \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}, \qquad |T_{n,3}(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{18n^2},\\
T_{n,4}(x) &= \frac{(x(1-x))^2}{n^2}\left(3 - \frac{6}{n}\right) + \frac{x(1-x)}{n^3} \le \begin{cases} \frac{1}{12}, & n = 1,\\ \frac{3}{16n^2} - \frac{1}{8n^3}, & n \ge 2,\end{cases}
\end{aligned}$$

und allgemein: für $s \in \mathbb{N}_0$ existieren $A_s, B_s > 0$ so, dass für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \le T_{n,2s}(x) \le \frac{A_s}{n^s}, \qquad 0 \le |T_{n,2s+1}(x)| \le \frac{B_s}{n^{s+1}}.$$

b) Für festes $x \in [0,1]$ und $\delta > 0$ sei

$$I_x(\delta) := \left\{k : 0 \le k \le n, \quad \left|x - \frac{k}{n}\right| \ge \delta\right\}.$$

Dann gilt mit A_s wie oben

$$\sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \le \frac{A_s}{n^s\,\delta^{2s}}.$$

Beweis. Die Darstellung von $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ folgt aus Lemma 7.4.
Für $s \in \mathbb{N}$ zeigt man zuerst die Rekursion

$$T_{n,s+1}(x) = \frac{x(1-x)}{n}\left(T'_{n,s}(x) + sT_{n,s-1}(x)\right)$$

durch direktes Nachrechnen von

$$T'_{n,s}(x) + sT_{n,s-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^s p'_{n,k}(x)$$

und

$$\frac{x(1-x)p'_{n,k}(x)}{n} = p_{n,k}(x)\left[\frac{k(1-x)}{n} - \frac{(n-k)x}{n}\right] = p_{n,k}(x)\left(\frac{k}{n} - x\right).$$

Aus der Rekursion folgt per Induktion, dass $T_{n,s}$ ein Polynom vom Grad s ist, genauer

$$T_{n,2s}(x) = \sum_{j=0}^{s} a_{n,s,j}(x(1-x))^j, \qquad T_{n,2s+1}(x) = (1-2x)\sum_{j=0}^{s} b_{n,s,j}(x(1-x))^j.$$

Die Koeffizienten im Induktionsanfang $s=0$ lauten $a_{n,0,0}=1$ und $b_{n,0,0}=0$. Die weiteren Koeffizienten ergeben sich aus der Rekursion sowie aus den Formeln

$$[x(1-x)]' = 1-2x, \quad (1-2x)^2 = 1-4x(1-x).$$

Wir erhalten $a_{n,s+1,0} = b_{n,s+1,0} = 0$ und für $1 \le j \le s+1$

$$\begin{aligned} a_{n,s+1,j} &= \frac{1}{n}\left(jb_{n,s,j} - (4j+2)b_{n,s,j-1} + (2s+1)a_{n,s,j-1}\right), \\ b_{n,s+1,j} &= \frac{1}{n}\left(ja_{n,s+1,j} + (2s+2)b_{n,s,j-1}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies mit $a_{n,0,0}=1$ und $b_{n,0,0}=0$ die Abnahmerate

$$|a_{n,s,j}| \le \frac{A_s}{n^s}, \qquad |b_{n,s,j}| \le \frac{B_s}{n^{s+1}},$$

mit geeigneten Konstanten $A_s, B_s > 0$. Die Schranken für $T_{2s}(x)$ und $T_{2s+1}(x)$ folgen durch Multiplikation mit $\sum_{j=0}^{s}(x(1-x))^j \le \sum_{j=0}^{s} 4^{-j} \le 4/3$.

Die Aussage b) folgt direkt aus a), denn

$$\sum_{k\in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \le \sum_{k\in I_x(\delta)} \frac{((\frac{k}{n})-x)^{2s}}{\delta^{2s}} p_{n,k}(x) \le \frac{1}{\delta^{2s}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^{2s} p_{n,k}(x).$$

□

Wir verwenden den Bernstein-Operator B_n auf dem Raum $C[0,1]$ ähnlich wie die Faltung mit dem Fejer-Kern auf dem Raum $C_*[0,1]$, um die Dichtheit der Polynome zu beweisen. Dies liefert den **Approximationssatz von Weierstraß** mit dem Beweis von S. N. Bernstein aus dem Jahr 1911.

7.7 Satz (Approximationssatz von Weierstraß 1885)**.** *Die Polynome liegen dicht in $C([a,b])$, das heißt für jedes $f \in C([a,b])$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom p mit $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$.*

Beweis. Gegeben sei $f \in C([a,b])$ und $\varepsilon > 0$. O.B.d.A. sei $[a,b]=[0,1]$ (sonst: affine Transformation $x = a + t\,(b-a)$).
Schritt 1. Weil $[0,1]$ kompakt ist, ist f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta$.

Schritt 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Mit der Indexmenge $I_x(\delta)$ aus Lemma 7.6(b) ist

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) p_{n,k}(x) \right| \qquad \text{(Teilung der Eins)} \\
&\leq \sum_{k \notin I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{da}\ \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta} p_{n,k}(x) + \sum_{k \in I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leq 2\,\|f\|_\infty} p_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin I_x(\delta)} p_{n,k}(x) + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_\infty \frac{1}{2\,n\,\delta^2}. \qquad \text{(Lemma 7.6 b)}
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f\|_\infty \frac{1}{2\,n\,\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt dann $|f(x) - B_n f(x)| < \varepsilon$. □

Im nächsten Schritt wollen wir quantitative Aussagen herleiten, die die Konvergenzgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Polynomgrads angeben. Als Maß dient hier wieder der Stetigkeitsmodul.

7.8 Satz (Popoviciu[7] 1935). *Für $f \in C([0,1])$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{5}{4}\, \omega\Big(f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 7.7 erhalten wir für $x \in [0,1]$ und beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k \notin I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leq \omega(f,\delta)} p_{n,k}(x) + \sum_{k \in I_x(\delta)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

Für $k \in I_x(\delta)$ verwende $\lambda_k := \frac{|x - \frac{k}{n}|}{\delta} \geq 1$ sowie $\lceil \lambda_k \rceil \leq 1 + \lambda_k \leq 1 + \lambda_k^2$. Dann folgt

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \omega(f, \lambda_k \delta) \leq \big(1 + \lambda_k^2\big)\, \omega(f, \delta).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &\leq \omega(f,\delta) \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)}_{=1} + \underbrace{\sum_{k \in I_x(\delta)} \lambda_k^2\, p_{n,k}(x)}_{\leq \delta^{-2} T_{n,2}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}} \Big) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{4n\delta^2}\right) \omega(f,\delta).
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ folgt die Behauptung. □

[7]Tiberiu Popoviciu, rumänischer Mathematiker, 1906-1975

7.9 Bemerkung. a) Die Abschätzung in 7.8 kann hinsichtlich der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ im Stetigkeitsmodul nicht verbessert werden.

Beispiel: $f \in C[0,1]$, $f(x) = |x - 1/2|$ hat den Stetigkeitsmodul $\omega(f, \delta) = \delta$ für beliebiges $\delta < 1/2$, und speziell bei $x = 1/2$ ist

$$|f(1/2) - B_n f(1/2)| = B_n f(1/2) = 2^{-n} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

b) Die bestmögliche Konstante $C > 0$ in der universellen Fehlerabschätzung

$$\|f - B_n f\| \leq C\, \omega\Big(f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) \quad \text{für alle} \quad f \in C[0,1]$$

wurde von P. C. Sikkema in *Numerische Math.* 3 (1961), S. 107-116, gefunden; es ist

$$C_{\text{opt}} = \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathcal{P}_1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f - B_n f\|_\infty}{\omega(f, 1/\sqrt{n})} = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} \approx 1.0898873.$$

Interessanterweise wird diese Konstante für den Grad $n = 6$ erzielt, das heißt

$$C_{\text{opt}} = \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathcal{P}_1} \frac{\|f - B_6 f\|_\infty}{\omega(f, 1/\sqrt{6})}.$$

Der Beweis verwendet ähnliche Methoden wie in Satz 7.8; dabei wird eine sehr genaue Abschätzung der Summe in

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega(f, \delta) \left(1 + \delta^{-1} \sum_{k \in I_x(\delta)} |x - k/n|\, p_{n,k}(x) \right)$$

vorgenommen.

c) Für $f \in C^1([0,1])$ kann man durch Anwendung des Mittelwertsatzes und der Rekursionsformel der Ableitung sogar

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3}{4\sqrt{n}}\, \omega\Big(f', \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

zeigen. Falls also f' Lipschitzstetig ist, folgt daraus

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3L}{4n},$$

das ist die Konvergenzrate $\mathcal{O}(n^{-1})$.

Beweis (s. Lorentz, *Bernstein polynomials*, 1953, S. 21): in der Summation von $f(x) - B_n f(x)$ wie im Beweis von Satz 7.8 ist

$$f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \Big(x - \frac{k}{n}\Big) f'(\xi_k) = \Big(x - \frac{k}{n}\Big) f'(x) + \Big(x - \frac{k}{n}\Big) (f'(\xi_k) - f'(x))$$

mit einem ξ_k zwischen x und k/n. Durch Summation über k fällt der erste Term der rechten Seite weg (Lemma 7.6), für den zweiten Term ergibt $\left|\frac{\xi_k - x}{\delta}\right| \le \left|\frac{k/n - x}{\delta}\right| = \lambda_k$

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\le \omega(f', \delta) \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| (1 + \lambda_k) p_{n,k}(x) \\ &\le \omega(f', \delta) \left(\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| p_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^2 p_{n,k}(x) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Summe hat die obere Schranke $\frac{1}{4n}$, die erste Summe wird mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abgeschätzt durch

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| p_{n,k}(x) \le \left(\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^2 p_{n,k}(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \right)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{4n}}.$$

Mit $\delta = 1/\sqrt{n}$ folgt die gewünschte Abschätzung.

d) Die Jackson-Sätze zeigen, dass die bestmögliche Approximation durch $\mathcal{P}_n$ den Fehler

$$E_n(f) = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_\infty \le c\, \omega\big(f, \tfrac{1}{n}\big)$$

besitzt. Deshalb sind die Bernstein-Operatoren nicht optimal.

Die Aussage in 7.9 c) legt es nahe, zu untersuchen, für welche Funktionen die Ordnung $\|f - B_n f\|_\infty = \mathbf{O}(\frac{1}{n})$ übertroffen werden kann. Dass dies nur für lineare Polynome $f \in \mathcal{P}_1$ passiert, für die ja sogar $f - B_n f \equiv 0$ gilt, nennt man **Saturation**.

7.10 Satz (Voronovskaya 1932)**.** *Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und besitze an einer Stelle $x \in [0,1]$ die erste und zweite Ableitung. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n(f(x) - B_n f(x)) = -\frac{x\,(1-x)}{2} f''(x).$$

Beweis. Die Taylorentwicklung von f um x ergibt

$$f(y) = f(x) + (y-x) f'(x) + (y-x)^2 \left(\frac{f''(x)}{2} + \gamma(y) \right),$$

und das Restglied γ ist eine beschränkte Funktion mit $\lim\limits_{y\to x} \gamma(y) = 0$.
Also ergibt sich durch Einsetzen von $y = \frac{k}{n}$

$$\begin{aligned} B_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x)\, p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x)\, p_{n,k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{f''(x)}{2} p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \gamma\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \\ &= f(x) + 0 + \frac{f''(x)}{2} \frac{x\,(1-x)}{n} + r_n(x). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$|r_n(x)| = \left|B_n((\cdot - x)^2\gamma)(x)\right| \le B_n((\cdot - x)^2|\gamma|)(x).$$

Zu zeigen bleibt

$$\lim_{n\to\infty} n r_n(x) = 0.$$

Wir verwenden die Lokalisierungstechnik wie in 7.8, hier aber mit dem 4. Moment $T_{n,4}$: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$

- wähle $\delta > 0$ mit $|\gamma(y)| < \varepsilon$ für $|y - x| < \delta$
- wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{A_2\|\gamma\|_\infty}{\delta^4 n_0} < \varepsilon$ mit A_2 aus Lemma 7.6.

Dann folgt mit $I_x(\delta)$ in Lemma 7.6 für alle $n \ge n_0$

$$n \sum_{k\notin I_x(\delta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \underbrace{\left|\gamma\left(\frac{k}{n} - x\right)\right|}_{<\varepsilon} p_{n,k}(x) \quad < \quad \varepsilon n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x) \le \frac{\varepsilon}{4}$$

sowie

$$n \sum_{k\in I_x(\delta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \underbrace{\left|\gamma\left(\frac{k}{n} - x\right)\right|}_{\le\|\gamma\|_\infty} p_{n,k}(x) \quad \le \quad n\,\|\gamma\|_\infty \sum_{k\in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \overset{7.6}{\le} n\|\gamma\|_\infty \frac{A_2}{\delta^4 n^2} < \varepsilon.$$

Also ist $n|r_n(x)| < \frac{5}{4}\varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. □

7.11 Bemerkung. Satz 7.10 besagt: falls an der Stelle $x \in [0,1]$ die zweite Ableitung von f ungleich 0 ist, so existiert eine Konstante $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - B_n f(x)| \ge \frac{c}{n}$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Die Konvergenzrate $\mathbf{O}(n^{-1})$ kann also nur an Nullstellen von f'' überschritten werden!

7.12 Bernstein-Operatoren auf $C([a,b])$. Mit der Koordinatentransformation

$$[0,1] \ni x \longmapsto t = a + x\,(b-a) \in [a,b]$$

erhalten wir die Knoten $t_k = a + \frac{k}{n}\,(b-a)$ und definieren

$$B_n^{[a,b]} : C([a,b]) \longrightarrow P_n, \qquad B_n^{[a,b]} f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\, p_{n,k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right). \tag{7.3}$$

Damit wird der Bernstein-Operator auch für Funktionen in $C[a,b]$ definiert.

Zusammenfassung:

$B_n : C([0,1]) \longrightarrow P_n$ ist ein linearer Operator. Es gelten

1. die Fehlerabschätzungen

$$\|f - B_n f\|_\infty \le \frac{5}{4}\,\omega\Big(f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\,,$$

   und für $f \in C^1([0,1])$ mit Lipschitz-stetiger Ableitung f' sogar

$$\|f - B_n f\|_\infty = \mathbf{O}\big(\tfrac{1}{n}\big)\,.$$

2. die Saturations-Aussage

$$\lim_{n\to\infty} n\ \left(f(x) - B_n(f;x)\right) = -\frac{f''(x)}{2}\, x\,(1-x).$$

Zum Abschluss des Kapitels wird die **Positivität** der Bernstein-Operatoren B_n noch einmal in den Vordergrund gestellt. Die Approximationsaussage in Satz 7.7 wird erneut bewiesen, indem nur die Approximation der ersten Monome e_0, e_1 und e_2 benutzt wird.

7.13 Definition (Positive lineare Operatoren)**.** *Ein linearer Operator $K : C[a,b] \to C[a,b]$ heißt positiv, falls*

$$Kf \ge 0 \quad \textit{für alle} \quad f \in C[a,b] \ \textit{mit}\ f \ge 0$$

gilt. Dabei bedeutet $f \ge 0$, dass $f(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$ erfüllt ist.

Man nennt K auch monoton, weil mit der Linearität

$$Kf \ge Kg \quad \text{für alle} \quad f,g \in C[a,b] \text{ mit } f \ge g$$

gilt.

7.14 Satz (Satz von P. P. Korovkin, 1953)**.** *Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver linearer Operatoren $K_n : C[a,b] \to C[a,b]$. Falls*

$$\lim_{n\to\infty} \|e_j - K_n e_j\| = 0 \quad \textit{für die drei Monome} \quad e_0, e_1, e_2$$

gilt, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - K_n f\| = 0 \quad \textit{für alle} \quad f \in C[a,b].$$

Beweis. Schritt 1. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x-y| < \delta$ (gleichmäßige Stetigkeit von f). Dann gilt die globale Abschätzung (auch für großes $|x-y|$)

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2.$$

Für beliebige $x, y \in [a, b]$ ist also

$$\underbrace{f(y) - \varepsilon - 2\|f\|_\infty \left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2}_{=p_y(x)\in\mathcal{P}_2} \le f(x) \le \underbrace{f(y) + \varepsilon + 2\|f\|_\infty \left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2}_{=q_y(x)\in\mathcal{P}_2}.$$

<u>Schritt 2.</u> Die Koeffizienten der Polynome $p_y(x) = a_y + b_y x + c_y x^2$ lauten

$$a_y = f(y) - \varepsilon - \frac{2\|f\|_\infty y^2}{\delta^2}, \quad b_y = \frac{4\|f\|_\infty y}{\delta^2}, \quad c_y = -\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}.$$

Sie sind gleichmäßig (für alle $y \in C[a, b]$) beschränkt, denn mit $r = \max\{|a|, |b|\}$ ist

$$\sup_{y\in[a,b]} |a_y| \le \|f\|_\infty + \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty r^2}{\delta^2}, \quad \text{etc.}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|p_y - K_n p_y\|_\infty \le \sup_{y\in[a,b]} |a_y|\, \|e_0 - K_n e_0\| + \sup_{y\in[a,b]} |b_y|\, \|e_1 - K_n e_1\| + \sup_{y\in[a,b]} |c_y|\, \|e_2 - K_n e_2\|,$$

also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|p_y - K_n p_y\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0, \quad y \in [a, b].$$

Die gleiche Beziehung folgt für die quadratischen Polynome q_y.

<u>Schritt 3.</u> Für beliebiges $y \in [a, b]$ ergibt $p_y \le f \le q_y$ sowie die Monotonie von K_n

$$K_n p_y \le K_n f \le K_n q_y \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Verwendung der Abschätzungen im 2. Schritt ergibt hieraus

$$p_y - \varepsilon \le K_n f \le q_y + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Damit erfüllt die Differenz $f - K_n f$ die Abschätzungen

$$p_y - q_y - \varepsilon \le f - K_n f \le q_y - p_y + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Werten wir dies an der Stelle x aus und setzen $y = x$, so erhalten wir wegen $q_x(x) - p_x(x) = 2\varepsilon$

$$-3\varepsilon \le f(x) - K_n f(x) \le 3\varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0,$$

also insgesamt $\|f - K_n f\|_\infty \le 3\varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. $\square$

Der Satz von Korovkin reduziert also die Überprüfung der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $K_n f$ gegen f auf die drei "Testfunktionen" e_0, e_1 und e_2. Für den Bernstein-Operator haben wir bereits in 7.5 die Beziehungen

$$B_n e_0 = e_0, \quad B_n e_1 = e_1, \quad B_n e_2(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$$

festgestellt. Der allgemeine Satz von Korovkin liefert also erneut einen Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß. Es lassen sich auch quantitative Aussagen zur Approximationsgüte von $K_n f$ herleiten, worauf wir hier aber verzichten.

Weitere positive Operatoren werden im Zusammenhang mit den Bernstein-Grundpolynomen definiert. Hierzu gehören der Bernstein-Durrmeyer Operator

$$M_n f = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \langle f, p_{n,k} \rangle \; p_{n,k},$$

wobei $\langle f, p_{n,k} \rangle = \int_0^1 f(x) p_{n,k}(x)\, dx$ ist (s. Übung), oder der Bernstein-Kantorovich Operator

$$K_n f = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(x)\, dx \right) \; p_{n,k}.$$

Solche Operatoren sind als Alternativen zum Bernstein-Operator ausführlich untersucht worden.