

MATHEMATIK VORKURS NAT-ING I – BLATT 3

THEMENGEBIET: ZAHLEN, ORDNUNG/BETRAG

Aufgabe 1)

Weisen Sie nach, dass für jede reelle Zahl $q \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Betrachten Sie dazu die Differenz der beiden Summen $q \cdot (\sum_{k=0}^n q^k)$ und $\sum_{k=0}^n q^k$, indem Sie der Vorfaktor q in der ersten Summe einmal reinmultiplizieren und einmal draußen lassen.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist etwas kniffliger.

Aufgabe 2)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\frac{26 \cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}}$

b) $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$

c) $\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}}$

d) $\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 : \left(\frac{ab^2}{c^2d^2}\right)^4$

Aufgabe 3)

Bestimmen Sie jeweils die reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0$

c) $x^2 + 6x + 13 = 0$

d) $x(x - 2) = 3$

e) $x^2 - 3x + 3 = x - 1$

Aufgabe 4)

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes $999^3 = (1000 - 1)^3$.
- b) Entscheiden Sie (ohne Taschenrechner), ob $(1.01)^{300} > 4$ gilt.

Aufgabe 5)

Der Betrag $|x|$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als x , falls $x \geq 0$ und als $-x$, falls $x < 0$, z.B. $|5| = 5$ und $|-3| = -(-3) = 3$.

Verwenden sie die Definition des Betrags, um folgende Ausdrücke ohne Betragsstriche, sondern stattdessen mit Fallunterscheidung nach den Zahlen x, y umzuschreiben:

- a) $|x + 6|$
- b) $|2x - 7|$
- c) $\frac{x+|x|}{2}$
- d) $2 + |2 - x|x$
- e) $|x^2 - 2xy + y^2|$

Beispiel: Es gilt

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{falls } x \geq 2, \\ -x + 2, & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Aufgabe 6)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

- a) $x - 6 > 2$
- b) $(x - 1)(x - 3) < 0$
- c) $\frac{x-1}{x-3} > 0$
- d) $2x - 2 < 3x + 5$
- e) $x^3 + 5x^2 \geq 0$
- f) $x^2 - 4x < 0$
- g) $\frac{2x}{3x+4} \geq 0$