

MATHEMATIK VORKURS NAT-ING I – BLATT 4

THEMENGEBIET: ORDNUNG/BETRAG, FUNKTIONEN

Aufgabe 1)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden (Un-)Gleichungen:

- a) $|x + 1| = |x - 1|$
- b) $|x - 1| + |x - 2| > 1$
- c) $|x - 1| + |x + 1| < 2$
- d) $x^2 > 9$

Hinweis: Verwenden Sie nach Möglichkeit die Interpretation des Betrags als Abstand zwischen Punkten auf dem Zahlenstrahl.

Aufgabe 2)

Die elektrische Feldstärke im Abstand r zu einem Elektron hat den Betrag

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Dabei ist $q > 0$ die Ladung des Elektrons und $\epsilon > 0$ die sogenannte Permittivität, eine physikalische Konstante. Wir führen die Abkürzung $C := \frac{q}{4\pi\epsilon}$ ein, so dass sich die Funktion E als

$$E(r) = \frac{C}{r^2}$$

schreiben lässt.

- a) Welche Zahlenwerte sind für den Abstand r sinnvoll? Wie lautet der mathematische Fachbegriff für diese Menge?
- b) Was sind alle möglichen Werte des Betrags der Feldstärke? Wie lautet der mathematische Fachbegriff für diese Menge?
- c) Für welche Abstände zum Elektron liegt der Betrag der Feldstärke zwischen 0 und $\frac{C}{100}$? Wie lautet der mathematische Fachbegriff für diese Menge?

Aufgabe 3)

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen an, deren Funktionsvorschrift wie folgt gegeben ist:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{3|1 - x|}$

e) $f(x) = \frac{1}{|x-1|} + \frac{|x|}{x+2}$

Bestimmen Sie jeweils den kleinstmöglichen Wertebereich der Funktionen aus a)-d).

Aufgabe 4)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen, deren Funktionsvorschrift wie folgt gegeben ist:

i) $a(x) = |x|$

ii) $b(x) = |x - 1|$

iii) $c(x) = |x + 1|$

iv) $d(x) = |x| + 1$

Bestimmen Sie den maximalen Definitions- und den entsprechenden Wertebereich. Bestimmen Sie $a^{-1}(\{3\})$, $b^{-1}(\{3\})$, $c^{-1}(\{3\})$ und $d^{-1}(\{3\})$.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen, deren Funktionsvorschrift wie folgt gegeben ist:

i) $e(x) = \frac{1}{x}$

ii) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

iii) $g(x) = \frac{1}{x+1}$

iv) $h(x) = \frac{1}{x} + 1$

Bestimmen Sie den maximalen Definitions- und den entsprechenden Wertebereich. Bestimmen Sie $e^{-1}([-2, 1])$, $f^{-1}([-2, 1])$, $g^{-1}([-2, 1])$, $h^{-1}([-2, 1])$

Aufgabe 5)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt symmetrisch zur Achse $x = c$, falls $f(c - x) = f(c + x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Bestimmen Sie die Symmetrieachse der Funktion $f(x) = x^2 - 10x + 1$.

Aufgabe 6)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $f^+(x) := \max(f(x), 0)$, das Maximum der beiden Werte $f(x)$ und 0 und $f^-(x) := \max(-f(x), 0)$, das Maximum der beiden Werte $-f(x)$ und 0. Drücken Sie f und $|f|$ mit Hilfe von f^+ und f^- aus.