

Lösung Globalübung 1

Abgabe: Keine Abgabe!

11.09.2026, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 Summen- und Indextransformation

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^2 2^{2k} - \sum_{k=2}^4 2k^2 &= \prod_{k=0}^2 4^k - 2 \cdot \sum_{k=2}^4 k^2 = (4^0 \cdot 4^1 \cdot 4^2) - 2 \cdot (2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= (1 \cdot 4 \cdot 16) - 2 \cdot (4 + 9 + 16) = 64 - 2 \cdot 29 = 64 - 58 = 6 \end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 (k+2)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 3 &\stackrel{\text{Index-Transf.}}{=} \sum_{k=1}^6 (k+1)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 3 \\ &= \sum_{k=1}^6 (k+1^2) - \sum_{k=1}^6 2k - \sum_{k=1}^6 1 = \sum_{k=1}^6 (k^2 + 2k + 1 - 2k - 1) = \sum_{k=1}^6 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Bruch- und Potenzrechnung)

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

a)

$$\frac{37 \cdot 6^n - 6^n}{6^{n+3}} = \frac{6^n \cdot (37 - 1)}{6^n \cdot 6^3} = \frac{36}{6^3} = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

b)

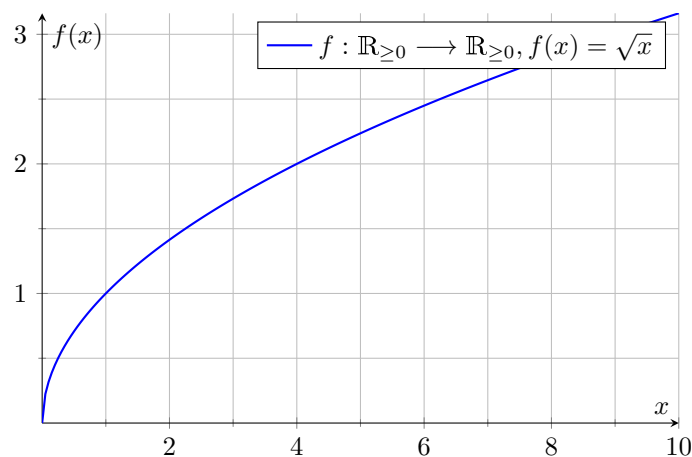
$$\frac{a \cdot \sqrt[3]{a^8} \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3})^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^8} \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3})^{-1}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} \stackrel{*}{=} a \cdot a^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\sqrt{(a^2)^2}\right)^{-1} \cdot a^{\frac{1}{3}} \stackrel{**}{=} \frac{a^{\frac{3}{3} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}}}{|a^2|} \stackrel{a \geq 0}{=} \frac{a^4}{a^2} = a^2$$

Erinnerung: $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

(*)An dieser Stelle können wir schön erkennen, dass wir die Potenzgesetze auf die Wurzelgesetze anwenden können. Denn: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} = a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = a^2 = \sqrt{(a^2)^2} = \sqrt{(a^2)^2}$

Mit der Begründung $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ können wir gut begründen, dass der Ausdruck $a^{\frac{1}{3}}$ in den oberen Zähler rutscht.

(**)Zunächst einmal sei gesagt, dass $\sqrt{9} = 3$ gilt. Die negative Lösung kommt hier nicht zum Tragen. Betrachten wir hierzu einmal die Wurzelfunktion. Diese ist für negative x -Werte nicht definiert und hat auch keine negativen Funktionswerte. Schauen wir die uns einmal an:



Anders würde es sich verhalten, wenn wir die Gleichung $x^2 = 9$ betrachten. Hier bekommen wir für x die Lösungen $x = 3 \vee x = -3$. Wir verwenden in Klausuren und Testaten die folgende Schreibweise: $x^2 = 9 \iff |x| = 3$. Mehr zum Rechnen mit Beträgen erfahrt ihr dann in der 9. Vorlesung des Vorkurses.

c)

$$\frac{d^{n+1} \cdot d^{n+1} - c^2 \cdot d^{2n}}{(d-c) \cdot (d \cdot d)^n} = \frac{d^n \cdot d \cdot d^n \cdot d - c^2 \cdot d^{2n}}{(d-c) \cdot d^{2n}} = \frac{d^{2n} \cdot d^2 - c^2 \cdot d^{2n}}{(d-c) \cdot d^{2n}} = \frac{d^{2n} \cdot (d^2 - c^2)}{(d-c) \cdot d^{2n}} = \frac{(d+c) \cdot (d-c)}{(d-c)} = d+c$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{2a \cdot (b^2 - 3b)}{b+3}}{\frac{a}{b+3} + \frac{a}{b-3}} &= \frac{\frac{2ab \cdot (b-3)}{b+3}}{\frac{ab - 3a + ab + 3a}{b^2 - 9}} = \frac{\frac{2ab \cdot (b-3)}{b+3}}{\frac{2ab}{b^2 - 9}} = \frac{2ab \cdot (b-3)}{b+3} : \frac{2ab}{b^2 - 9} \\
 &= \frac{2ab \cdot (b-3)}{b+3} \cdot \frac{(b+3)(b-3)}{2ab} \\
 &= (b-3)^2
 \end{aligned}$$

e)

$$\frac{\frac{n+m}{m} \cdot n^2 \cdot m^3}{(n^2 - m^2) \frac{n}{n-m}} \cdot \frac{m^{27} \cdot n^7}{m^{28} \cdot n^5 \cdot n^2} = \frac{(n+m) \cdot n^2 \cdot m^2}{(n+m)(n-m) \cdot \frac{n}{n-m}} \cdot \frac{n^7}{m \cdot n^7} = \frac{n^2 \cdot m^2 \cdot (n-m)}{(n-m) \cdot n} \cdot \frac{1}{m} = n \cdot m$$

f)

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{a^2}{2a} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot (a^2 - 1)} : \left(\frac{(a-1)^3}{a^2 + 1 - 2a} \right)^{-1} &= \frac{\frac{a^2}{2a} + \frac{a}{2a}}{\frac{(a+1)(a-1)}{4}} \cdot \frac{(a-1)^3}{(a-1)^2} = \frac{a^2 + a}{2a} \cdot \frac{4}{(a+1)(a-1)} \cdot (a-1) \\
 &= \frac{a \cdot (a+1) \cdot 4 \cdot (a-1)}{2a \cdot (a+1)(a-1)} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

(*) Wir verwenden hier: $\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \right)^{-1} = \frac{a}{b} : \frac{1}{\left(\frac{c}{d} \right)^1} = \frac{a}{b} : \left(\frac{1}{1} : \frac{c}{d} \right) = \frac{a}{b} : \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{d}{c} \right) = \frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

g)

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[6]{\pi^9}}{2^{-1} \cdot \sqrt{2^5} \cdot \pi} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \pi^{\frac{9}{6}}}{\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot \pi} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \pi^{\frac{9}{6}} \cdot 2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot \pi} = \frac{2^{\frac{5}{2}} \cdot \pi^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot \pi} = \pi$$

h)

$$\begin{aligned}
\frac{5a-6b}{30c^2} - b \cdot \frac{5c^2-3a}{15ac^2} + \frac{3c^2-2b}{12bc^2} \cdot a - \frac{a}{4b} + \frac{b}{3a} &= \frac{2ab(5a-6b) - 4bb(5c^2-3a) + 5a(3c^2-2b)a - 15ac^2a + 20bc^2b}{60abc^2} \\
&= \frac{10a^2b - 12ab^2 - 20b^2c^2 + 12ab^2 + 15a^2c^2 - 10a^2b - 15a^2c^2 + 20b^2c^2}{60abc^2} \\
&= \frac{0}{60abc^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a - \frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-1}}} &= \frac{1}{a - \frac{a^2}{\frac{-a}{a-1}}} = \frac{1}{a - \left(a^2 \cdot \frac{a-1}{-a}\right)} = \frac{1}{a - \left(-a^2 \cdot \frac{a-1}{a}\right)} \\
&= \frac{1}{a - (-a(a-1))} = \frac{1}{a - (-a^2 + a)} = \frac{1}{a + a^2 - a} = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

N.R.:

$$a - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a(a-1)}{a-1} - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a(a-1) - a^2}{a-1} = \frac{a^2 - a - a^2}{a-1} = \frac{-a}{a-1}$$