

Lösung Globalübung 2

Abgabe: Keine Abgabe!

24.09.2026, 14:00 Uhr

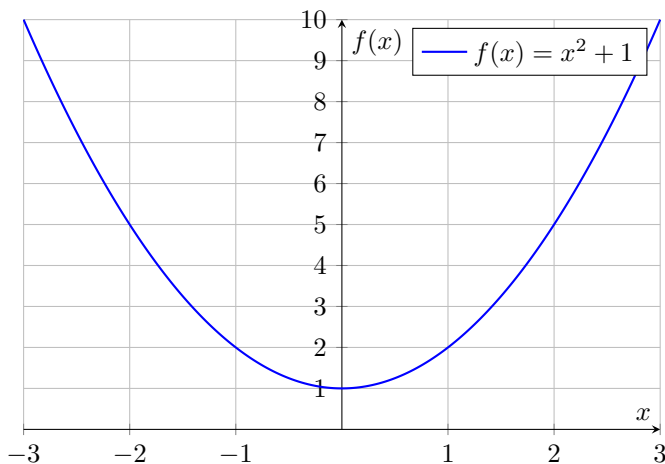
Aufgabe 1 Abbildungen

a) Gegeben Sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit $f(x) = x^2 + 1$

i) Zunächst erstellen wir eine Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	5	2	1	2	5	10

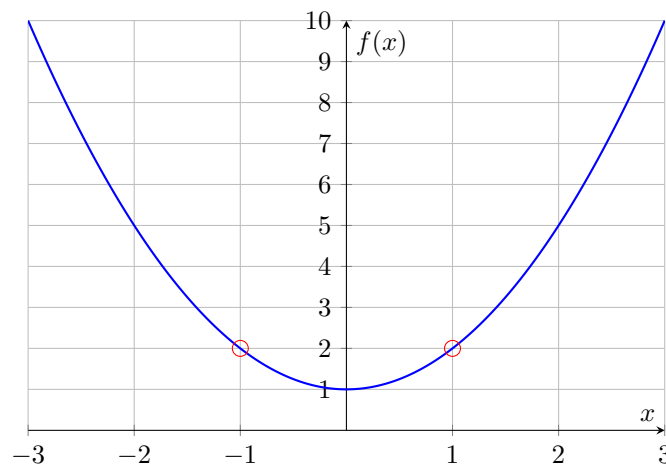
Zeichnen dieser Funktion liefert dann:



ii) Um nun zu entscheiden, ob die Funktion injektiv, surjektiv oder gar bijektiv ist, schauen wir uns nochmal die Definitionen dieser Begriffe an.

Injektiv	Jeder Wert aus dem Wertebereich wird höchstens einmal getroffen
Surjektiv	Jeder Wert aus dem Wertebereich wird mindestens einmal getroffen.
Bijektiv	Die Abbildung ist sowohl injektiv als auch surjektiv.

injektiv?



Wir erkennen in unserer obigen Grafik, dass auf den Funktionswert $y = 2$ zweimal abgebildet wird. Einmal von $x = -1$ und von $x = 1$. Die $2 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ ist also Teil unseres Wertbereichs und wird zweimal getroffen. Einmal von $x = -1$ und ein anderes Mal von $x = 1$.

Unsere Abbildung ist also **nicht injektiv**.

Hinweis: Dies hätten wir auch an unserer Wertetabelle erkennen können. Hier sehen wir in der letzten Zeile, dass wir zweimal die 2 haben aber zwei unterschiedliche x -Werte darauf abbilden.

Kurzer Ausblick: Später braucht Ihr nicht immer eine Wertetabelle oder die Abbildung vorher einzeichnen. Wir lernen später eine etwas formellere Definition von Injektivität und Surjektivität kennen, die uns die Arbeit etwas erleichtert. Aber für ein erstes Verständnis für die Definition dieser neuen Begrifflichkeiten, ist dieses Verfahren ideal.

surjektiv

Hier müssen wir überprüfen, ob es für jeden Wert aus unserem Wertebereich (hier: $\mathbb{R}_{\geq 1}$) ein x -Wert gibt, welcher auf diesen abbildet. Aus der Schule wissen wir, dass wir eine nach oben geöffnete Parabel haben, welche im Punkt $SP(0|1)$ seinen Scheitelpunkt besitzt. Im weiteren Verlauf werden die Funktionswerte immer größer als 1 sein. Deswegen können wir sagen, dass wir zu jedem $y \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ ein x finden, sodass gilt $f(x) = y$ gilt. Insgesamt ist unsere Abbildung also **surjektiv**.

Da unsere Abbildung allerdings nicht injektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

iii) Für das Bild einer Abbildung $f : D \rightarrow W$ mit $f(x) = y$ gilt:

$$\text{Bild}(f) := f(D) := \{y \in W \mid \exists x \in D \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq W$$

Wir können hier also sagen, dass unser Bild unser maximaler Wertebereich ist, sodass die Surjektivität nicht verletzt ist. Wir suchen also alle y auf die tatsächlich abgebildet wird. Mit ii) gilt also:

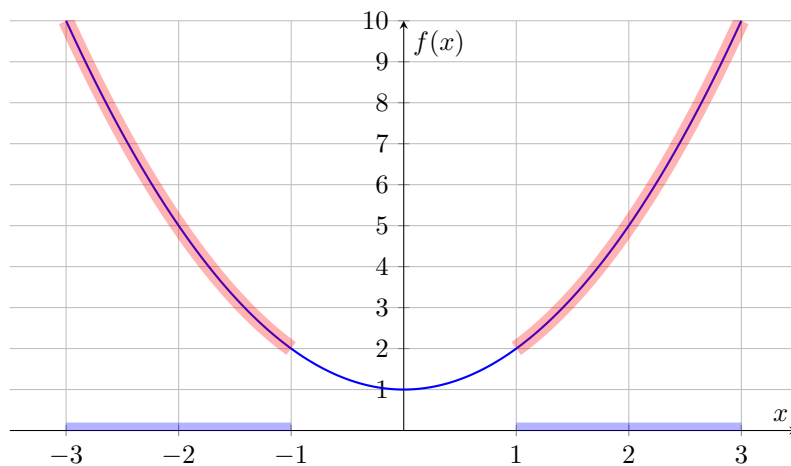
$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{\geq 1}$$

iv) Für das Urbild einer Abbildung $f : D \rightarrow W$ und $U \subseteq W$ gilt:

$$f^{-1}(U) := \{x \in D \mid f(x) \in U\} \subseteq D$$

Das Urbild von U ist also die Menge aller Elemente von D , deren Bild (deren Funktionswerte) in U liegt, die also mit der Abbildung f auf eines der Elemente von U abgebildet werden.

Wir müssen jetzt $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 2})$ bestimmen:



Wir suchen also jetzt alle x -Werte, welche auf die Funktionswerte $y \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ abbilden. Diese x -Werte sind hier blau hervorgehoben. Wir erhalten also:

$$f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 2}) = \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$$

- b) Da es bei unserer Abbildung an der Injektivität gescheitert ist, müssen wir unseren Definitionsbereich einschränken, sodass die Abbildung bijektiv ist. Die hier um eine Einheit nach oben verschobene Normalparabel ist achsensymmetrisch zur y -Achse. (da $f(x) = f(-x)$). Das bedeutet wir brauchen für den Definitionsbereich nur die positiven x -Werte inklusive der Null betrachten. Unsere bijektive Abbildung lautet also:

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1} \text{ mit } f(x) = x^2 + 1$$

Aufgabe 2 Nullstellen

a)

$$\begin{aligned} 7x^2 - 28x + 21 &= 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \iff x_1 &= -\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \text{ und } x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ \iff x_1 &= 2 + \sqrt{1} \text{ und } x_2 = 2 - \sqrt{1} \\ \iff x_1 &= 3 \text{ und } x_2 = 1 \end{aligned}$$

Alternativ mit Quadratischer Ergänzung (q.E.)

Bei der Quadratischen Ergänzung gehen wir immer so vor, dass wir die Terme mit einem x auf einer Seite haben und die Konstanten auf der anderen Seite. Im Anschluss ergänzen wir immer den Ausdruck $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}
7x^2 - 28x + 21 = 0 &\iff 7(x^2 - 4x + 3) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \\
&\iff x^2 - 4x = -3 \\
&\stackrel{q.E.}{\iff} x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 \\
&\iff x^2 - 4x + 4 = 1 \\
&\iff (x - 2)^2 = 1 \\
&\iff |x - 2| = 1 \\
&\iff x - 2 = 1 \quad \vee \quad -(x - 2) = 1 \\
&\iff x = 3 \quad \vee \quad x = 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
6x^3 - 6x^2 = 12x &\iff 6x^3 - 6x^2 - 12x = 0 \iff 6x(x^2 - x - 2) = 0 \\
&\iff 6x = 0 \text{ oder } x^2 - x - 2 = 0 \\
&\iff x_1 = 0 \text{ und } x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} \\
&\iff x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \text{ und } x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\
&\iff x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ und } x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\
&\iff x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2 \text{ und } x_3 = -1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x^6 + 3x^4 + 2x^2 &\iff x^2(x^4 + 3x^2 + 2) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ oder } x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \\
&\stackrel{x^2=t}{\iff} t = 0 \text{ oder } t^2 + 3t + 2 = 0 \\
&\iff t = 0 \text{ und } t_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
&\iff t = 0 \text{ und } t_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \text{ und } t_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\
&\iff t = 0 \text{ und } t_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{ und } t_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\
&\iff t = 0 \text{ und } t_2 = -1 \text{ und } t_3 = -2
\end{aligned}$$

Bei der Rücksubstitution erhalten wir für t_2 und t_3 keine reelle Lösungen. Deshalb erhalten wir die einzigen möglichen reellen Nullstellen, indem wir $t = 0$ rücksubstituieren.

$$t = 0 \iff x^2 = 0 \iff |x| = 0 \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$t = -1 \iff x^2 = -1 \not\text{ da es in } \mathbb{R} \text{ keine Lösung gibt.}$$

Aufgabe 3 Lineare Gleichungssysteme

a)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 25 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 42 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 7 \\ 4 & 5 & 6 & | & 25 \\ 5 & 7 & -1 & | & 42 \end{pmatrix}}_{=:(A|b)}$$

Bestimme nun die Zeilenstufenform mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 7 \\ 4 & 5 & 6 & | & 25 \\ 5 & 7 & -1 & | & 42 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-4)} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \\ \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \\ 0 & -3 & -16 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \xleftarrow{+} \\ \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \\ 0 & 0 & -10 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 3$. Das LGS ist also lösbar. Da wir drei Variablen x_1, x_2, x_3 haben, ist $n = 3$. Die Anzahl der frei wählbaren Parameter ist gegeben durch:

$$F = n - \text{Rang}(A) = 3 - 3 = 0$$

Also wissen wir, dass wir keinen Parameter frei wählen müssen. Unser LGS ist also **eindeutig lösbar**.

Mithilfe von Rückwärtseinsetzen erhalten wir:

$$\text{(III)} \quad -10x_3 = 10 \iff x_3 = -1$$

$$\text{(II)} \quad -3x_2 - 6x_3 = -3 \xrightarrow{x_3=-1} -3x_2 = -9 \iff x_2 = 3$$

$$\text{(I)} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \xrightarrow[x_2=3]{x_3=-1} x_1 + 6 - 3 = 7 \iff x_1 = 4$$

Für die Lösungsmenge erhalten wir:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$\begin{array}{rcl}
 3x_3 + 8x_2 + 4x_1 & = & 7 \\
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\
 -2x_3 + 3x_2 - x_1 & = & -3
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad
 \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \end{array} \right)}_{=:(A|b)}$$

Wir bringen $(A|b)$ in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \end{array} \right) \xleftarrow{\quad} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \end{array} \right) \xleftarrow{\quad} \left[\begin{array}{l} \cdot(-4) \\ + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\
 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{array} \right) \xleftarrow{\quad} \left[\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \right] \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Aus der Zeilenstufenform folgt

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2.$$

Da $n = 3$ (drei Variablen) gilt:

$$F = n - \text{Rang}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Das LGS ist also **mehrdeutig lösbar** mit genau einem freien Parameter.

Setze $x_3 =: t$

Mithilfe von Rückwärtseinsetzen erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
 \text{(II)} \quad 4x_2 - x_3 = -1 \xrightarrow{x_3=t} 4x_2 = t - 1 \iff x_2 = \frac{t-1}{4} \\
 \text{(I)} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \xrightarrow[x_2=\frac{t-1}{4}]{x_3=t} x_1 + \frac{t-1}{4} + t = 2 \\
 \iff x_1 + \frac{t-1+4t}{4} = 2 \\
 \iff x_1 = 2 - \frac{5t-1}{4} \\
 \iff x_1 = \frac{8-5t+1}{4} \\
 \iff x_1 = \frac{9-5t}{4}
 \end{array}$$

Für die Lösungsmenge erhalten wir:

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} \frac{9-5t}{4} \\ \frac{t-1}{4} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} 3x_3 + 8x_2 + 4x_1 & = & 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & | & 7 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}}_{=:(A|b)}$$

Bestimme nun die Zeilenstufenform mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & | & 7 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & | & 7 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform folgt $\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A|b)$

Das LGS ist also nicht lösbar.

Aufgabe 4 Beträge und Betragsgleichungen

Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist der Betrag definiert als

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Um also die Definition anwenden zu können, müssen wir also zunächst schauen, wann das Argument (innere des Betrags) 0 wird. Dies nennen wir die kritische Stelle.

Zum Lösen von Betrags(un)gleichungen könnt ihr euch an folgende 4 Schritte halten:

1. Bestimme alle möglichen kritischen Stellen
2. Stelle alle möglichen Fälle auf und löse die entsprechenden Gleich.- bzw. Ungleichungen
3. Bestimme die Lösungsmenge der einzelnen Fälle, indem du den Schnitt der Fallbedingung und der nach x umgestellten Menge bestimmst.
4. Bestimme die Gesamte Lösungsmenge, indem du die einzelnen Lösungsmenge miteinander vereinigst.

$$\text{a) } \frac{3x-3}{|x+1|} + 10 = 1 \iff 3x-3 = -9 \cdot |x+1|$$

$$\text{kritische Stelle: } x+1 = 0 \iff x = -1$$

Wir unterscheiden also zwei Fälle:

Hier müssen wir aufpassen. Den Fall $x = -1$ dürfen wir hier nicht betrachten, da wir sonst durch 0 teilen würden.

Fall 1: $x < -1$ Fall 2: $x > -1$

Fall 1: $x < -1$ ← Fallbedingung zu Fall 1

$$\begin{aligned} 3x - 3 = -9 \cdot |x + 1| &\stackrel{x < -1}{\iff} 3x - 3 = -9(-(x + 1)) \iff 3x - 3 = 9x + 9 \\ &\iff -6x = 12 \\ &\iff x = -2 \end{aligned}$$

Mit Überprüfung der Fallbedingung erhalten wir als Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty; -1) \cap \{-2\} = \{-2\}$$

Fall 2: $x > -1$ ← Fallbedingung zu Fall 2

$$\begin{aligned} 3x - 3 = -9 \cdot |x + 1| &\stackrel{x > -1}{\iff} 3x - 3 = -9(x + 1) \iff 3x - 3 = -9x - 9 \\ &\iff 12x = -6 \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_2 = (-1; \infty) \cap \{-\frac{1}{2}\} = \{-\frac{1}{2}\}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{L}_G = \{-2\} \cup \{-\frac{1}{2}\} = \{-2, -\frac{1}{2}\}$$

b) $|2x + 3| - 20 = |3x - 12|$

kritische Stellen:

$$2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$$

$$3x - 12 = 0 \iff x = 4$$

Wir unterscheiden also drei Fälle:

Fall 1: $x < -\frac{3}{2}$ Fall 2: $-\frac{3}{2} \leq x < 4$ Fall 3: $x \geq 4$

Fall 1: $x < -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} |2x + 3| - 20 = |3x - 12| &\stackrel{x < -\frac{3}{2}}{\iff} -(2x + 3) - 20 = -(3x - 12) \iff -2x - 3 - 20 = -3x + 12 \\ &\iff -2x - 23 = -3x + 12 \\ &\iff x = 35 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cap \{35\} = \{\}$$

Fall 2: $-\frac{3}{2} \leq x < 4$

$$\begin{aligned} |2x + 3| - 20 = |3x - 12| &\stackrel{-\frac{3}{2} \leq x < 4}{\iff} 2x + 3 - 20 = -(3x - 12) \iff 2x - 17 = -3x + 12 \\ &\iff 5x = 29 \\ &\iff x = \frac{29}{5} = 5,8 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_2 = [-\frac{3}{2}; 4) \cap \{\frac{29}{5}\} = \{\}$$

Fall 3: $x \geq 4$

$$\begin{aligned} |2x + 3| - 20 = |3x - 12| &\stackrel{x \geq 4}{\iff} 2x + 3 - 20 = 3x - 12 \iff 2x - 17 = 3x - 12 \\ &\iff -x = 5 \\ &\iff x = -5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_3 = [4; \infty) \cap \{-5\} = \{\}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{L}_G = \{\} \cup \{\} \cup \{\} = \{\}$$

c) $||x - 2| - 2| = 1$

kritische Stelle: $x - 2 = 0 \iff x = 2$

Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle:

Fall 1: $x < 2$ Fall 2: $x \geq 2$

Fall 1: $x < 2$

$$||x - 2| - 2| \stackrel{x < 2}{\iff} |-(x - 2) - 2| = 1 \iff |-x| = 1$$

Hier erhalten wir nun zwei Unterfälle und zwar:

Fall 1a: $x < 0$ Fall 1b: $x \geq 0$

Fall 1a: $x < 0$

$$|-x| = 1 \stackrel{x < 0}{\iff} -x = 1 \iff x = -1$$

$$\mathbb{L}_{1a} = (-\infty; 0) \cap (-\infty; 0) \cap \{-1\} = \{-1\}$$

Fall 1b: $x \geq 0$

$$|-x| = 1 \stackrel{x \geq 0}{\iff} -(-x) = 1 \iff x = 1$$

$$\mathbb{L}_{1b} = (-\infty; 0) \cap [0; \infty) \cap \{1\} = \{1\}$$

Fall 2: $x \geq 2$

$$|x - 2 - 2| = 1 \iff |x - 4| = 1$$

Wir unterscheiden wieder zwei Unterfälle:

Fall 2a: $x < 4$ Fall 2b: $x \geq 4$

Fall 2a: $x < 4$

$$\begin{aligned} |x - 4| = 1 &\stackrel{x < 4}{\iff} -(x - 4) = 1 \iff -x - 4 = 1 \iff -x = -3 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_{2a} = [2; \infty) \cap (-\infty; 4) \cap \{3\} = \{3\}$$

Fall 2b: $x \geq 4$

$$|x - 4| = 1 \stackrel{x \geq 4}{\iff} x - 4 = 1 \iff x = 5$$

$$\mathbb{L}_{2b} = [2; \infty) \cap [4; \infty) \cap \{5\} = \{5\}$$

$$\text{Insgesamt erhalten wir: } \mathbb{L}_G = \{-1\} \cup \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} = \{-1, 1, 3, 5\}$$