

Lösung Globalübung 3

Abgabe: Keine Abgabe!

24.09.2026, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 Betragsungleichungen

$$|x - 3| \geq |x + 1|$$

Variante 1: rechnerisch

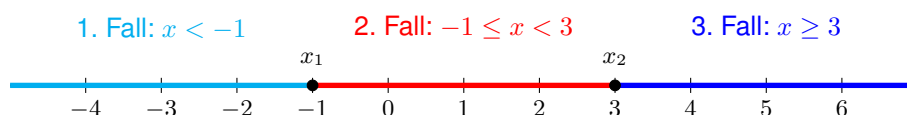
Kritische Stellen:

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Also: $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

Damit erhalten wir drei Fälle:



1. Fall: $x < -1$

$$|x - 3| \geq |x + 1| \Leftrightarrow -(x - 3) \geq -(x + 1) \Leftrightarrow 3 - x \geq -x - 1 \Leftrightarrow 3 - x + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 0$$

Diese Aussage ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aus Vergleich mit Fallbedingung folgt: $\mathbb{L}_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty; -1) = (-\infty; -1)$

2. Fall: $-1 \leq x < 3$

$$|x - 3| \geq |x + 1| \Leftrightarrow -(x - 3) \geq (x + 1) \Leftrightarrow 3 - x \geq x + 1 \Leftrightarrow 3 - 1 \geq x + x \Leftrightarrow 2 \geq 2x \Leftrightarrow 1 \geq x \Leftrightarrow x \leq 1$$

Aus Vergleich mit Fallbedingung folgt: $\mathbb{L}_2 = (-\infty; 1] \cap [-1; 3) = [-1; 1]$

Die Äquivalenz $1 \geq x \Leftrightarrow x \leq 1$ kann man sich gut erklären. Wenn 1 größer oder gleich x ist, bedeutet das im Umkehrschluss direkt, dass x kleiner oder gleich 1 sein muss.

Wir können das auch rechnerisch zeigen. Dabei gilt es zu beachten, dass das Ungleichheitszeichen bei Multiplikationen mit negativen Werten stets umgedreht werden muss:

$$\begin{aligned} 1 &\geq x && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow -x &\geq -1 && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow x &\leq 1 \end{aligned}$$

3. Fall: $x \geq 3$

$$|x - 3| \geq |x + 1| \Leftrightarrow x - 3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x - 3 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \geq 0$$

Diese Aussage ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Also: $\mathbb{L}_3 = \emptyset$

Insgesamt:

$$\mathbb{L}_{\text{ges.}} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty; -1) \cup [-1; 1] \cup \emptyset = (-\infty; 1]$$

Variante 2: argumentativ

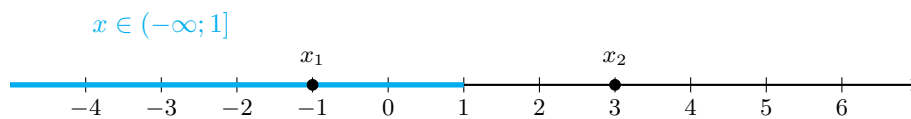
Wir wissen, dass wir einen Betrag anschaulich als Abstand zwischen zwei Zahlen auffassen können.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen wir mit $|a - b|$ die Distanz von a zu b .

Unsere vorliegende Betragsungleichung können wir in diese Form überführen. Es gilt:

$$|x - 3| \geq |x + 1| \Leftrightarrow |x - 3| \geq |x - (-1)|$$

Das heißt, wir suchen alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand zu 3 größer oder gleich dem Abstand zu -1 ist.



Beispielsweise am Zahlenstrahl wird klar: Dies gilt für alle $x \in (-\infty; 1]$.

Somit erhalten wir als Gesamtlösungsmenge: $\mathbb{L} = (-\infty; 1]$

Aufgabe 2 Komplexe Zahlen

a) $(3 + 2i)z = 2z + 3$

Koordinatenform einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$(3 + 2i)z = 2z + 3 \Leftrightarrow 3z + 2iz = 2z + 3 \Leftrightarrow z + 2iz = 3 \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 3 \Leftrightarrow z = \frac{3}{(1 + 2i)}$$

$$\stackrel{\substack{\Longleftrightarrow \\ \text{Erweitern mit der} \\ \text{komplex Konjugierten}}}{=} z = \frac{3}{(1 + 2i)} \cdot \frac{(1 - 2i)}{(1 - 2i)} \stackrel{\text{3. BF}}{=} \frac{3 \cdot (1 - 2i)}{1^2 - (2i)^2} \stackrel{i^2 = -1}{=} \frac{3 \cdot (1 - 2i)}{1 + 4} = \frac{3 - 6i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$$

b) i) Stellen Sie z in Koordinatenform (mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) dar.

$$z = \frac{25a \cdot i^7 - \frac{25}{2} \cdot (1 + i)^2}{3 - 4i} \stackrel{i^6 = -1}{=} \frac{(25a(-i) - \frac{25}{2}(1 + 2i - 1))}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{(-25ai - 25i)(3 + 4i)}{9 - 16i^2}$$

$$\stackrel{i^2 = -1}{=} \frac{-25i(a + 1)(3 + 4i)}{25} = (a + 1)(-3i + 4) = -3ai + 4a - 3i + 4 = (4a + 4) + (-3a - 3)i$$

ii) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass z reell ist, also $z \in \mathbb{R}$ gilt.

Damit $z \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\text{Im}(z) = 0$ gelten:

$$-3a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Aufgabe 3 Ableitungen

Produktregel: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$	Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
---	---

Bestimmen Sie formal die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(e^x) \cdot e^{-x}$$

Es gilt: $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit

$p(x) = \sin(e^x)$	$q(x) = e^{-x}$
$p'(x) = e^x \cdot \cos(e^x)$	$q'(x) = (-1) \cdot e^{-x}$

Also erhalten wir mit der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = (\sin(e^x) \cdot e^{-x})' = e^x \cdot \cos(e^x) \cdot e^{-x} + \sin(e^x) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = \cos(e^x) - \sin(e^x) \cdot e^{-x}$$

Aufgabe 4 Integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \text{ mittels Substitution}$$

$t := x^2 + 1 = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = \frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$
--

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot t^{\frac{1}{2}}] = [\sqrt{t}] \stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} \sqrt{x^2+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$