

Kapitel 8 – Anwendungen der Differentialrechnung

Satz 8.1 (Monotonieverhalten)

Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt:

1. Ist $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton steigend.
2. Ist $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton fallend.
3. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ konstant.

Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{1-x}$ ist auf $[0, 1]$ stetig und streng monoton fallend, da

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0, 1).$$

- $f(x) = x^2$ ist auf $[0, 1]$ stetig mit

$$f'(x) = 2x > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, 1).$$

Damit ist f auf $[0, 1]$ streng monoton steigend.

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden mit I bezeichnet).

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden mit I bezeichnet).

Definition 8.2 (Krümmung)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...

- 1. ... LINKSGEKRÜMMT, falls $f'' > 0$ für alle $x \in I$.*
- 2. ... RECHTSGEKRÜMMT, falls $f'' < 0$ für alle $x \in I$.*

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden mit I bezeichnet).

Definition 8.2 (Krümmung)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...

1. ... LINKSGEKRÜMMT, falls $f'' > 0$ für alle $x \in I$.
2. ... RECHTSGEKRÜMMT, falls $f'' < 0$ für alle $x \in I$.

Definition 8.3 (Wendestelle, Wendepunkt)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in I$ und $f''(x)$ habe in x_0 einen Vorzeichenwechsel. Dann heißt x_0 eine WENDESTELLE und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein WENDEPUNKT (des Graphen) von f .

Definition 8.4 (Extremum)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (Der Graph von) f hat in x_0 ein ...

1. ...GLOBALES MAXIMUM, *wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.*
2. ...GLOBALES MINIMUM, *wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.*

Definition 8.4 (Extremum)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (Der Graph von) f hat in x_0 ein ...

1. ...GLOBALES MAXIMUM, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2. ...GLOBALES MINIMUM, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
3. ...LOKALES MAXIMUM, wenn es ein offenes Intervall $I \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$.
4. ...LOKALES MINIMUM, wenn es ein offenes Intervall $I \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.

Maxima und Minima fassen wir auch unter dem Namen EXTREMA zusammen. Wir nennen x_0 eine EXTREMALSTELLE, $f(x_0)$ ein EXTREMUM und $(x_0, f(x_0))$ einen EXTREMPUNKT (des Graphen) von f .

Satz 8.5 (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Satz 8.5 (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

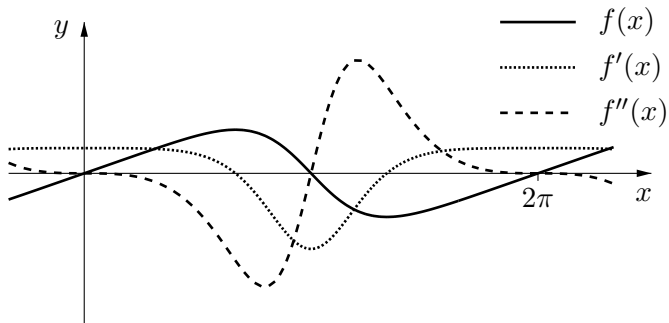
Achtung: Die Umkehrung dieses Satzes ist in der Regel nicht richtig. Das zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$.

Satz 8.6 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

- 1. Ist $f''(x_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$, so hat f in x_0 ein $\begin{cases} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{cases}$.*
- 2. Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f in x_0 eine Wendestelle. In diesem Fall spricht man von einem SATTELPUNKT.*

Beispiel: Wir betrachten $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.



8. Typische Anfängerfehler

1. Aus $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ wird geschlossen, dass f monoton wachend, aber nicht streng monoton wachsend ist: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

ist streng monoton steigend, aber $f'(x) = 3x^2$, insb. $f'(0) = 0$.

2. Es wird nicht zwischen globalen und lokalen Extrema unterschieden.
3. Das notwendige Kriterium $f'(x_0) = 0$ für lokale Extrema in inneren Punkten wird auf globale Extrema angewendet:

Die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ erfüllt

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \neq 0,$$

aber f hat in $x_0 = 1$ ein globales Maximum.