

Kapitel 7 – Differenzierbarkeit

Die Begriffe GRENZWERT und STETIGKEIT werden in Mathematikvorlesungen genau definiert. Hier sollen nur die Ideen verdeutlicht werden.

Definition 7.1 (Grenzwert und Stetigkeit)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$ ein Punkt in I und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl.

1. Die Funktion f hat in x_0 den GRENZWERT a , wenn sich für alle $x \in I$ "in der Nähe von x_0 " die Werte $f(x)$ nur "um beliebig wenig von a unterscheiden". Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

2. Die Funktion f heißt STETIG in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. f heißt STETIG auf I , wenn f in allen Punkten von I stetig ist.

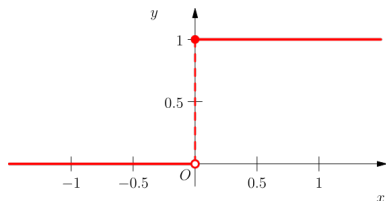
Beispiele: Polynome, Betrag, Sinus, Cosinus sind stetig.

7. Beispiel einer unstetigen Funktion

Funktionen, die SPRUNGSTELLEN haben, sind unstetig.

Heaviside-Funktion: $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ 1, & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$



ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, denn:

Nähert man sich mit x dem Punkt 0 "von links" an, so "verharrt" der Funktionswert $H(x)$ im Wert 0. Für den Funktionswert $H(0)$ gilt aber $H(0) = 1 \neq 0$.

Die Heaviside-Funktion hat also in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle und ist dort daher nicht stetig.

Definition 7.2 (Differenzierbarkeit)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... DIFFERENZIERBAR IM PUNKT $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert des DIFFERENZENQUOTIENTEN

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

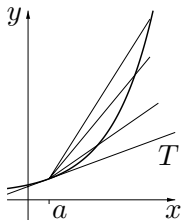
existiert. Dieser Wert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt die ABLEITUNG von f an der Stelle x_0 .

2. ... DIFFERENZIERBAR AUF I , wenn f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

die ABLEITUNG von f .

Die Ableitung einer Funktion f kann man geometrisch interpretieren.



Die Steigung der Tangente T im Punkt a ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

Definition 7.3 (Tangente)

Die Gerade mit der Gleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

heißt TANGENTE an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ (kurz auch: Tangente an f in x_0).

Beispiel 7.4 (Grundlegende Beispiele)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x	1	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$
x^2	$2x$	$\sin x$	$\cos x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\cos x$	$-\sin x$

Beobachtung: In der rechten Spalte taucht $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nie auf!

Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet anschaulich, dass sich die Funktionswerte von f in einer “kleinen Umgebung von x_0 ” gut durch die Werte der Tangente annähern lassen. Man sagt auch:

f ist LINEAR APPROXIMIERBAR.

Satz 7.5

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0 .

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht! Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Beispiel: $f(x) = |x|$.

Satz 7.6 (Differentiationsregeln)

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

1. VIELFACHE $(cf)' = cf'$
2. SUMMENREGEL $(f + g)' = f' + g'$
3. PRODUKTREGEL $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. QUOTIENTENREGEL $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ (für } g(x) \neq 0\text{)}$

Satz 7.7 (Kettenregel)

Seien g differenzierbar an der Stelle x und f differenzierbar an der Stelle $g(x)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x mit Ableitung

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

7. Beispiele zur Anwendung der Differentiationsregeln

1. Für $f(x) = x^2 \sin x$ gilt

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

2. Für $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

3. Für eine differenzierbare Funktion f und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

4. Für eine differenzierbare Funktion f mit $f(x) \neq 0$ gilt

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Satz 7.8 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Die Funktion $f : I \rightarrow J$ habe eine Umkehrfunktion f^{-1} . Außerdem sei f im Punkt $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y = f(x) \in J$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Herleitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow \underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{=x} (f^{-1})'(y) = 1.$$

Beispiel: $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin(x)$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(y) = \arcsin(y).$$

Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $f'(x) = \cos(x) > 0$, also

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

7. Weitere Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ($n \in \mathbb{N}$)
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Definition 7.9 (Höhere Ableitungen)

1. Ist f differenzierbar und die Ableitung f' stetig auf I , so nennt man f STETIG DIFFERENZIERBAR.
2. Sind f und f' differenzierbar auf I , dann nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die ZWEITE ABLEITUNG von f .
3. Ebenso definiert man höhere Ableitungen f''' , $f^{(4)}$, ...
4. f heißt k -MAL STETIG DIFFERENZIERBAR, wenn $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.

Anwendung: Kurvendiskussion

1. Nullstellen, Pole, Asymptoten
2. Monotonieverhalten und Extremwerte
3. Krümmungsverhalten und Wendepunkte

7. Typische Anfängerfehler

1. Nichtbeachtung der Quotientenregel. Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet:

$$\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' \neq \frac{1}{2x}.$$

2. Beim Ableiten verketteter Funktionen wird die innere Ableitung vergessen:

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' \neq \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. Ableitung parameterabhängiger Funktionen nach dem Parameter statt nach der Variablen: Für $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(2nx)$ gilt

$$f'(x) \neq 2x \cos(2nx).$$

Tatsächlich ist $f'(x) = 2n \cos(2nx)$.