

Kapitel 10 – Logarithmus- und Exponentialfunktion

Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ tauchte allerdings in unseren Beispielen zur Differentiation nie als Ableitung auf.

Definition 10.1 (Logarithmusfunktion)

Die LOGARITHMUSFUNKTION (bzw. der NATÜRLICHE LOGARITHMUS) ist definiert als

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Satz 10.2 (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Für die Ableitung der Logarithmusfunktion gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Satz 10.3 (Eigenschaften des Logarithmus)

Für alle $x, y > 0$ gilt:

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
3. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
4. $\ln(x^r) = r \ln x$ (für alle $r \in \mathbb{N}_0$, später auch für alle $r \in \mathbb{R}$).
5. $\ln$ ist streng monoton steigend und besitzt eine Umkehrfunktion.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$.

Definition 10.4 (Exponentialfunktion)

Die EXPONENTIALFUNKTION $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist als die Umkehrfunktion des Logarithmus $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Die Zahl $e := \exp(1) \approx 2,718281828 \dots$ heißt EULERSCHE ZAHL.

Satz 10.5 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

1. $\exp$ ist streng monoton wachsend.
2. $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$.
3. $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
5. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$.
6. $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ (für alle $r \in \mathbb{N}_0$, später auch für alle $r \in \mathbb{R}$).
7. $\exp'(x) = \exp(x)$.

Bemerkung 10.6

Satz 10.5, Punkt 6. besagt im Spezialfall $x = 1$ und $r \in \mathbb{N}_0$ bzw. $r \in \mathbb{R}$:

$$\exp(r) = \exp(1)^r = e^r.$$

Definition 10.7 (allgemeine Potenz)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die allgemeine Potenz a^b durch

$$a^b := \exp(b \ln a).$$

a heißt BASIS, b ist der EXPONENT.

10. Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c > 0$ gilt:

1. NEGATIVE EXPONENTEN: $a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}$.

2. WURZELN: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.

3. POTENZGESETZE:

$$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b, \quad a^b \cdot a^d = a^{b+d}, \quad (a^b)^d = a^{b \cdot d}.$$

4. ABLEITUNG NACH BASIS: Für $x > 0$ gilt

$$(x^b)' = bx^{b-1}.$$

5. ABLEITUNG NACH EXPONENT: $(a^x)' = a^x \ln a$

Nach der Kettenregel gilt nämlich

$$(a^x)' = (\exp(x \ln a))' = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenzen erweitern unsere Integrationsregeln:

Satz 10.8

1. $\int \exp(x) dx = \exp(x) + c.$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$
4. $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c \quad (\text{für alle } r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$
5. $\int r^x dx = \frac{r^x}{\ln r} + c \quad (\text{für alle } r \in (0, \infty) \setminus \{1\}).$