

Kapitel 9 – Integralrechnung

Definition 9.1 (Stammfunktion)

Es seien $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. F heißt STAMMFUNKTION von f auf I , wenn

1. F auf I differenzierbar ist,
2. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 9.2

1. Ist F eine Stammfunktion von f , so ist auch $G := F + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .
2. Sind G und F zwei Stammfunktionen von f , so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = F(x) + c$.

Fazit: Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Definition 9.3 (unbestimmtes Integral)

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt UNBESTIMMTES INTEGRAL von f und wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet. Ist F eine Stammfunktion zu f , so schreiben wir auch

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Satz 9.4 (Erste Eigenschaften: Linearität)

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
2. $\int (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \int f(x) dx$ für $c \in \mathbb{R}.$

9. Grundintegrale

Um an erste unbestimmte Integrale bzw. Stammfunktionen zu kommen, lesen wir die Ableitungstabellen aus Kapitel 7 rückwärts:

Beispiel 9.5

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ *und* $\int \cos x dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ *und* $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

Die Produkt- und Substitutionsregel für Ableitungen können genutzt werden, um weitere unbestimmte Integrale zu erhalten.

Satz 9.6 (Partielle Integration)

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

.

Beispiel:

Für $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ gilt $f'(x) = 1$, $g'(x) = \cos x$, also

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

Satz 9.7 (Substitution)

Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$

Beispiel:

Für $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2$ gilt $g'(x) = 2x$ und $F(x) = \sin(x)$ ist eine Stammfunktion von f . Somit folgt

$$\int \cos(x^2) \cdot x dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c.$$

Alternativ: Substituiere $y := x^2$ und rechne symbolisch

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x \Leftrightarrow x dx = \frac{dy}{2}.$$

Damit ergibt sich ebenfalls

$$\int \cos(x^2) \cdot x dx = \int \cos(y) \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sin(y) + c = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c.$$

Folgerung 9.8

Es sei F eine Stammfunktion zu f . Dann ist

1. $\int f(x + a) dx = F(x + a) + c$
2. $\int f(a \cdot x) dx = \frac{1}{a} F(a \cdot x) + c$
3. $\int g(x) \cdot g'(x) dx = \frac{1}{2} (g(x))^2 + c$
4. $\int x \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot F(x^2) + c$

Definition 9.9 (bestimmtes Integral)

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat der Wert $F(b) - F(a)$ für jede Stammfunktion F von f den gleichen Wert. Dieser Wert heißt BESTIMMTES INTEGRAL von f in den Grenzen a und b und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx := F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

bezeichnet. Man nennt

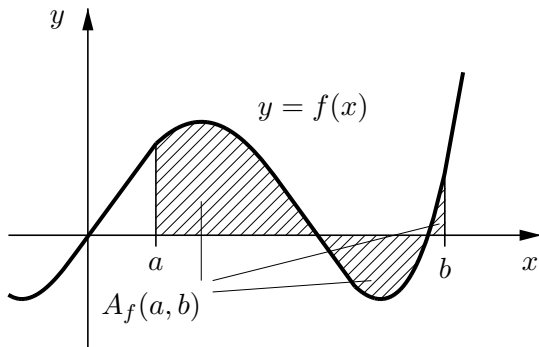
- f den INTEGRAND,
- a die UNTERE INTEGRATIONSGRENZE,
- b die OBERE INTEGRATIONSGRENZE,
- $[a, b]$ das INTEGRATIONSINTERVALL.

Bemerkung: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ definiert man ebenfalls

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a).$$

Integral und Flächeninhalt

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ lässt sich als der orientierte Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a, b]$ deuten.



Satz 9.10 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$ und $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
2. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
3. $\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$.
4. Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(t) \Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

5. Ist $f(x) \leq g(x)$ so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Satz 9.11 (geometrischer Flächeninhalt)

Es sei f integrierbar. Der GEOMETRISCHE FLÄCHENINHALT $A_f(a, b)$ von f auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse einschließt.

Dieser lässt sich gemäß $A_f(a, b) = \int_a^b |f(x)| dx$ berechnen.

Beispiel 9.12

Für $f(x) = x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion. Damit gilt also

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

aber

$$A_f(-1, 1) = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \left(F(x) \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}.$$

9. Typische Anfängerfehler

1. Die Stammfunktion von $f(g(x))$ wird als $F(g(x))\frac{1}{g'(x)}$ angegeben,

$$\int \cos(x^2) dx \neq \frac{\sin(x^2)}{2x} + c.$$

2. Bei der Substitutionsregel werden die Integrationsgrenzen nicht mitsubstituiert:

$$\int_0^1 \underbrace{(1+x^3)^2}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)} dx \neq \int_0^1 t^2 dt.$$

3. Der Betrag $|x|$ wird zu $\frac{1}{2}|x|^2$ integriert:

$$\int_{-1}^1 |x| dx \neq \left. \frac{1}{2}|x|^2 \right|_{-1}^1$$

Tatsächlich muss man das Integral aufteilen:

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx$$