

Kapitel 1 – Mengen

Beispiel: Die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich Eins sind, kann mit mathematischen Symbolen als

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \text{ oder } (-\infty, 1]$$

geschrieben werden.

Für das Verständnis ist die Kenntnis der einzelnen Bestandteile nötig:

- $\{ \}$: Mengenklammern (Was ist eine Menge?)
- x : Variable (Was ist eine Variable?)
- $\in, |, \leq, (,], \infty$ (Was bedeuten diese Zeichen?)
- $\mathbb{R}$: reelle Zahlen (Was sind reelle Zahlen?)

Wichtig: Nicht nur die Bedeutung der einzelnen Symbole, sondern auch deren Reihenfolge und Verknüpfung ist entscheidend.

→ Mathematischer Formalismus ist wie eine Fremdsprache.

Definition 1.1 (Mengen)

Unter einer MENGE verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit.

Diese Objekte heißen dann ELEMENTE der Menge.

Beschreibung von Mengen durch ...

- ... Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\dots\}$.
- ... Angabe einer Eigenschaft E , die die Elemente beschreibt:

$$\{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Schreibweise: Sei M eine Menge.

- Ist x ein Element der Menge M , so schreiben wir kurz $x \in M$.
- Ist x kein Element der Menge M , so schreiben wir kurz $x \notin M$.

1. Beispiele zur Aufzählung mit Mengenklammern

- $\{1, 2, 3\}$ Die Menge, die aus den Zahlen 1, 2, 3 als Elemente besteht.
- $\{1, 2, 3, 2\} = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ Mehrfachnennungen verändern nichts und die Reihenfolge der Elemente ist egal.
- $\{r, m, d, t, o, u, n\}$ Menge der Kleinbuchstaben im Wort "Dortmund".
- $\{\}$ ist die LEERE MENGE, die kein Element enthält. Alternative Notation: $\emptyset$.

Eine neue Notation kann man symbolisch durch $:=$ einführen. Lese " $:=$ " als "wird definiert durch".

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN. Die Punkte $\dots$ führen die Liste "sinnvoll" weiter.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN MIT NULL.
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Die Menge der GANZEN ZAHLEN.

1. Beispiele zur Aufzählung mit definierender Eigenschaft

- Für eine natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathbb{N}^{\geq k} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$. Die Menge der natürlichen Zahlen, die größer oder gleich k sind.
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$. Die Menge der RATIONALEN ZAHLEN.
- $\mathbb{R}$ Die Menge der REELLEN ZAHLEN, vgl. später.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\} = \{0, 1\}$. Diese Menge lässt sich sowohl aufzählen als auch beschreiben.
- $\{v \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Der Name des Platzhalters (Variable) ist bedeutungslos.

Beispiele für $\in$ und $\notin$:

$$1 \in \mathbb{N}, \quad 1 \notin \mathbb{N}^{\geq 3}, \quad -4 \in \mathbb{Q}, \text{ da } -4 = \frac{-4}{1}$$

Definition 1.2 (Mengenoperationen)

Es seien M und N Mengen.

1. VEREINIGUNG: Menge der Elemente aus M oder N :

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

2. SCHNITT: Die Menge der Elemente, die in M und in N liegen.

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

3. DIFFERENZ von N und M . Die Menge der Elemente, die in N enthalten sind, aber nicht in M .

$$N \setminus M := \{x \mid x \in N \text{ und } x \notin M\}$$

Beispiele:

$$\{1, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1\}, \quad \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}, \quad \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

Definition 1.3 (Mengenrelationen)

Es seien M und N Mengen.

1. M und N heißen DISJUNKT, wenn $M \cap N = \emptyset$.
2. M heißt TEILMENGE VON N , wenn alle Elemente von M auch in N enthalten sind. Symbolisch:

$$M \subset N \text{ oder } N \supset M.$$

3. Ist $M \subset N$, so ist das KOMPLEMENT von M in N durch $M^c := N \setminus M$ definiert.
4. M und N sind GLEICH, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$, wenn also M und N die gleichen Elemente enthalten.

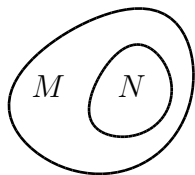
Beispiele:

$$\emptyset \subset M \subset M \text{ für alle Mengen } M$$

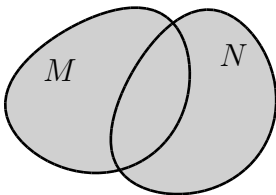
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Achtung: Manchmal wird das Symbol $\subseteq$ anstelle von $\subset$ verwendet.

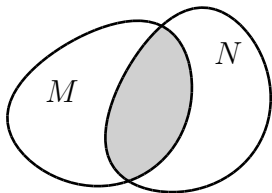
Graphisch kann man die Mengenoperationen gut mit Hilfe von VENN-DIAGRAMMEN darstellen:



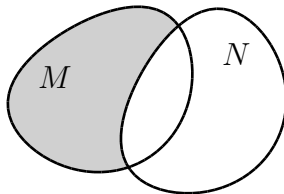
$$N \subset M$$



$$M \cup N$$



$$M \cap N$$



$$M \setminus N$$

Satz 1.4 (Rechenregeln für Mengenoperationen)

1. KOMMUTATIVITÄT:

$$M \cup N = N \cup M \text{ und } M \cap N = N \cap M.$$

2. ASSOZIATIVITÄT:

$$(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P) \text{ und } (M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$$

3. DISTRIBUTIVITÄT:

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P) \text{ und } M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

4. DE MORGANSCHES REGELN:

$$M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P) \text{ und } M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$$

Komplemente:

$$(M \cup N)^c = M^c \cap N^c \text{ und } (M \cap N)^c = M^c \cup N^c$$

Definition 1.5 (Kartesisches Produkt)

1. Das KARTESISCHE PRODUKT $M \times N$ zweier Mengen M und N enthält als Elemente die geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$:

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}.$$

Achtung: Die Reihenfolge ist bei Paaren wichtig:

$$(a, b) = (x, y) \text{ bedeutet } a = x \text{ und } b = y.$$

2. Das kartesische Produkt mehrerer Mengen $M_1, \dots, M_k$ wird analog definiert. Beispiel:

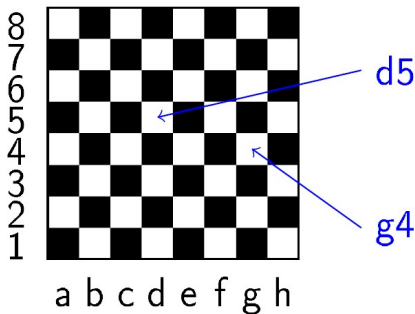
$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Die Elemente heißen TUPEL: Paare sind 2-Tupel, 3-Tupel sind Tripel, 4-Tupel sind Quadrupel. Allgemein: n -Tupel.

Vorsicht: $(a, b) \neq \{a, b\}$.

Die Positionen auf einem Schachbrett werden mit einem kartesischen Produkt beschrieben:

$$(d, 5), (g, 4) \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



Aufgabe: Drücke Folgendes mit mathematischen Symbolen aus:

Es gibt (mindestens) eine reelle Zahl x , die die Gleichung $x^2 = 1$ löst.

Definition 1.6 (Quantoren)

Ist A eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge M sinnvoll ist, so schreiben wir

$$\forall x \in M : A(x),$$

wenn jedes Element aus M die Eigenschaft A hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ und

$$\exists x \in M : A(x),$$

wenn es mindestens ein Element aus M gibt, das die Eigenschaft A hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

Beispiel oben:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1.$$