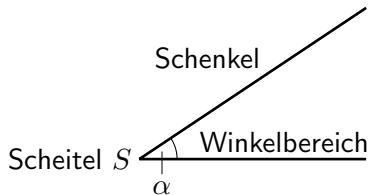
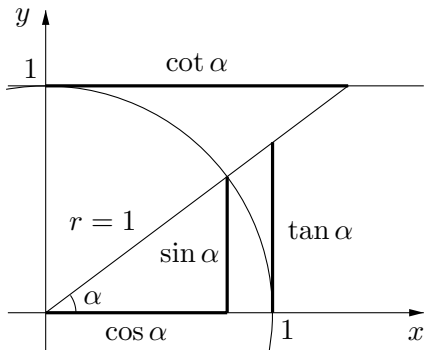


Kapitel 6 – Trigonometrie



Winkel werden in GRAD
oder im BOGENMASS
(auch RAD) angegeben:
 $360^\circ \hat{=} 2\pi$.

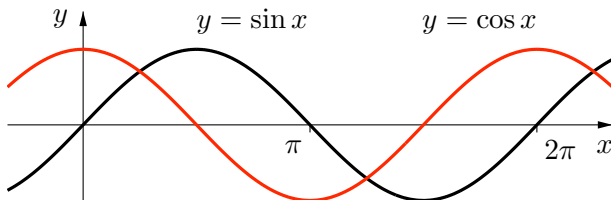


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

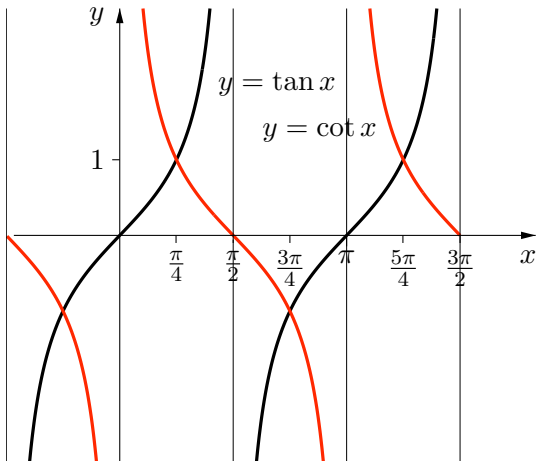
Definition 6.1 (Winkelfunktionen)

Name		D	W
<i>Sinus</i>	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
<i>Cosinus</i>	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
<i>Tangens</i>	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
<i>Kotangens</i>	$\cot$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

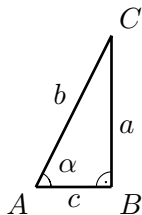
Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktionen



Die Graphen der Tangens- und Kotangensfunktionen:



Bemerkung 6.2 (Interpretation am rechtwinkligen Dreieck)



Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sin \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{a}{c}$$

Spezielle Werte der Winkelfunktionen:

x in Grad	0	30°	45°	60°	90°
x in Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Eselsbrücke für die Sinus-Werte:

x in Grad	0	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Definition 6.3 (Periodische Funktionen)

Es sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt T -PERIODISCH, wenn $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

$\sin$ und $\cos$ sind 2π -periodisch, $\tan$ und $\cot$ sind π -periodisch.

Definition 6.4 (Symmetrie von Funktionen)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... GERADE, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
2. ... UNGERADE, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 6.5 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

1. $\sin$ sowie $\cos$ sind 2π - und $\tan$ sowie $\cot$ sind π -periodisch.
2. $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$.
3. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.
5. $\cos$ ist eine gerade Funktion und $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind ungerade Funktionen.
6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$.
7. $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
 $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (TRIGONOMETRISCHE PYTHAGORAS).
9. $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ und $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}$.

Bemerkung 6.6 (Einschränkungen der Winkelfunktionen)

Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen benutzt man zur Definition von Umkehrfunktionen:

1. $\sin \big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ *ist streng monoton wachsend.*
2. $\cos \big|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ *ist streng monoton fallend.*
3. $\tan \big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*
4. $\cot \big|_{(0, \pi)} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend.*

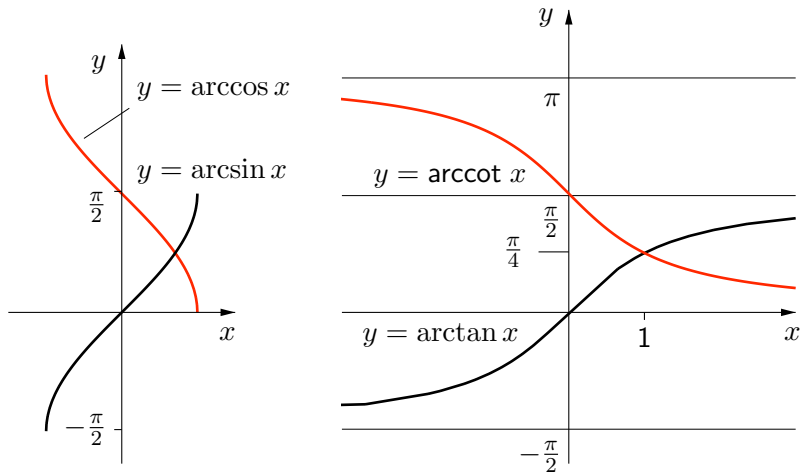
Man kann zeigen, dass diese Einschränkungen jeweils Umkehrfunktionen besitzen.

Definition 6.7 (Arcusfunktionen)

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

1. $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
3. $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
4. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow \left]0, \pi\right[$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus:



Beim Rechnen mit Winkelfunktionen sind folgende ADDITIONSTHEOREME sehr nützlich:

Satz 6.8 (Additionstheoreme)

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man:

Folgerung 6.9 (Doppelte Winkel)

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme:

