

LÖSUNGEN DER ÜBUNGSBLÄTTER 1-5

Blatt 1

Aufgabe 1)

- a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
- c) $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- d) $D = \{1, -1\}$
- e) $E = \{1\}$
- f) $F = \emptyset$
- g) $G = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Aufgabe 2)

- a) $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq -3\}$
- b) $B = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$
- c) $C = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$
- d) $D = \{\frac{k}{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3)

- a) $A \cap B = \{1, 2\}$
- b) $B \cup C = \{-3, -1, 1, 2, 3, 4\}$
- c) $A \setminus B = \{-2, -1, 0\}$
- d) $C^c = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$
- e) $(B^c)^c = \{1, 2, 3, 4\}$
- f) $M^c = \{\}$
- g) $(A \cap C^c)^c = \{-3, -1, 3, 4\}$
- h) $((A \cap B) \cup C)^c = \{-2, 0, 4\}$

i) $B \times C = \{(1, -3), (1, -1), (1, 3), (2, -3), (2, -1), (2, 3), (3, -3), (3, -1), (3, 3), (4, -3), (4, -1), (4, 3)\}$

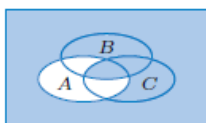
Aufgabe 4)

- a) richtig
- b) richtig
- c) ja
- d) Es gilt nicht immer $C = A \cap B$.

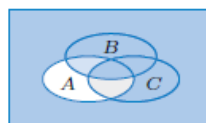
Aufgabe 5)

(a) Wahr:

Linke Seite:

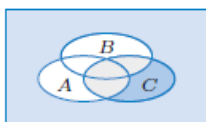


Rechte Seite:

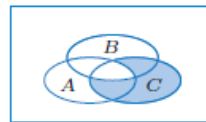


(b) Falsch:

Linke Seite:

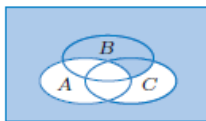


Rechte Seite:

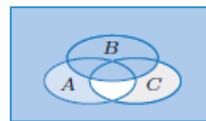


(c) Falsch:

Linke Seite:



Rechte Seite:



Aufgabe 6)

- a) falsch
- b) falsch
- c) falsch
- d) richtig
- e) falsch

Blatt 2

Aufgabe 1)

- a) (w) wahre Aussage.
- b) Keine Aussage.
- c) Im strengen Sinne keine (mathematische) Aussage.
- d) Keine Aussage.
- e) (w) wahre Aussage.
- f) (f) falsche Aussage.
- g) (w) wahre Aussage.
- h) (f) falsche Aussage.
- i) Keine Aussage.

Aufgabe 2)

- a) (w)
- b) (w)
- c) (f)
- d) (w)
- e) (f)
- f) (w)
- g) (f)
- h) (f)
- i) (f)
- j) (w)

Aufgabe 3)

- a) Die Äquivalenz gilt, da

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

- b) Die Äquivalenz gilt, da

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Leftrightarrow \neg B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

c) Die Folgerung gilt, da

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$	$A \Leftrightarrow C$	$((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 4)

a)

$$\frac{3}{8} = 0.375 \quad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571} \quad \frac{21}{5} = 4.2$$

b) $0.8 = \frac{4}{5}$ und $0.15\overline{3} = \frac{23}{150}$

Aufgabe 5)

a) $12 + 14 + 16 + 18 + \dots + 42 = \sum_{k=6}^{21} 2k$

b) $1 + 6 + 11 + \dots + 36 = \sum_{k=0}^7 (1 + 5k)$

c) $\frac{5}{2} - \frac{5}{4} + \frac{5}{8} - \frac{5}{16} + \frac{5}{32} - \frac{5}{64} = \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} \frac{5}{2^k}$

d) $\sin(2x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{3} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{5} \sin(6x) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} \sin((k+1)x)$

Aufgabe 6)

a) $\sum_{k=2}^5 (2k+1) = 32$

b) $\sum_{k=2}^5 2k + 1 = (\sum_{k=2}^5 2k) + 1 = 29$

c) $\sum_{k=5}^2 (2k+1) = 0$

d) $\sum_{k=2}^5 3 = 12$

e) $\prod_{j=2}^5 1 = 1$

f) $\prod_{m=1}^3 \frac{m+1}{(m+2)^2} = \frac{1}{150}$

g) $\prod_{m=3}^3 \frac{m+1}{(m-1)^2} = 1$

Blatt 3

Aufgabe 1)

Einerseits gilt

$$q \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) - \sum_{k=0}^n q^k = (q-1) \sum_{k=0}^n q^k$$

und andererseits

$$q \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) = \sum_{k=0}^n (q \cdot q^k) = \sum_{k=0}^n q^{k+1},$$

also

$$\begin{aligned} q \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) - \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n q^{k+1} - \sum_{k=0}^n q^k = (q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}) - (q^0 + q^1 + \cdots + q^n) \\ &= q^{n+1} - q^0 = q^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$(q-1) \sum_{k=0}^n q^k = q^{n+1} - 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 2)

a) $\frac{26 \cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}} = 1$

b) $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} = \frac{1}{81x^2}$

c) $\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}} = a^2$

d) $\left(\frac{a^2b}{cd^3} \right)^3 : \left(\frac{ab^2}{c^2d^2} \right)^4 = \frac{a^2c^5}{b^5d}$

Aufgabe 3)

a) $x_1 = -1, \quad x_2 = -5$

b) $x = -3$

c) Es gibt keine reelle Lösung x .

d) $x_1 = 3, \quad x_2 = -1$

e) $x = 2$

Aufgabe 4)

a) Es gilt

$$\begin{aligned} 999^3 &= (1000 - 1)^3 = 1 \cdot 10^9 \cdot (-1)^0 + 3 \cdot 10^6 \cdot (-1)^1 + 3 \cdot 10^3 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot (-1)^3 \\ &= 1\,000\,000\,000 - 3\,000\,000 + 3\,000 - 1 = 997\,002\,999. \end{aligned}$$

b) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} (1.01)^{300} &= (1 + 0.01)^{300} = 1^{300} + \binom{300}{1} 1^{299} (0.01)^1 + \text{positive Terme} \\ &= 1 + 300 \cdot 1 \cdot 0.01 + \text{positive Terme} = 4 + \text{positive Terme} > 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 5)

$$\text{a) } |x + 6| = \begin{cases} x + 6, & \text{falls } x \geq -6 \\ -x - 6, & \text{falls } x < -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } |2x - 7| = \begin{cases} 2x - 7, & \text{falls } x \geq \frac{7}{2} \\ -2x + 7, & \text{falls } x < \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } 2 + |2 - x|x = \begin{cases} 2 - 2x + x^2, & \text{falls } x > 2 \\ 2 + 2x - x^2, & \text{falls } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } |x^2 - 2xy + y^2| = |(x - y)^2| = (x - y)^2$$

Aufgabe 6)

$$\text{a) } \mathbb{L} = (8, \infty)$$

$$\text{b) } \mathbb{L} = (1, 3)$$

$$\text{c) } \mathbb{L} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

$$\text{d) } \mathbb{L} = (-7, \infty)$$

$$\text{e) } \mathbb{L} = [-5, \infty).$$

$$\text{f) } \mathbb{L} = (0, 4)$$

$$\text{g) } \mathbb{L} = (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup [0, \infty)$$

Blatt 4

Aufgabe 1)

- a) $x = 0$
- b) $\mathbb{L} = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
- c) $\mathbb{L} = \emptyset$
- d) $x > 3$ oder $x < -3$

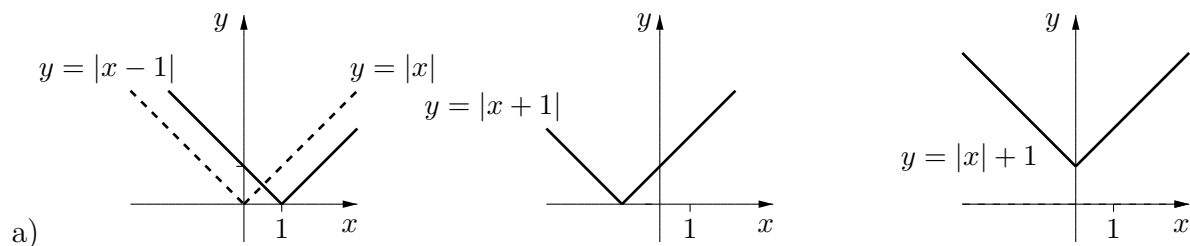
Aufgabe 2)

- a) Der Abstand r sollte sinnvollerweise > 0 sein, also $r \in (0, \infty)$. Mathematischer Fachbegriff: $D = (0, \infty)$ ist der Definitionsbereich von E .
- b) Es können Werte in $(0, \infty)$ angenommen werden. Mathematischer Fachbegriff: $W = (0, \infty)$ ist der Wertebereich von E .
- c) Für $10 < r$. Mathematischer Fachbegriff: $E^{-1}((0, \frac{r}{100})) = (10, \infty)$ ist das Urbild von $(0, \frac{r}{100})$ unter E .

Aufgabe 3)

- a) Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ und Wertebereich $W = [0, 1]$.
- b) Definitionsbereich $D = [-1, 1]$ und Wertebereich $W = [0, 1]$.
- c) Definitionsbereich $D = \emptyset$ und Wertebereich $W = \emptyset$.
- d) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W = [0, \infty)$.
- e) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

Aufgabe 4)

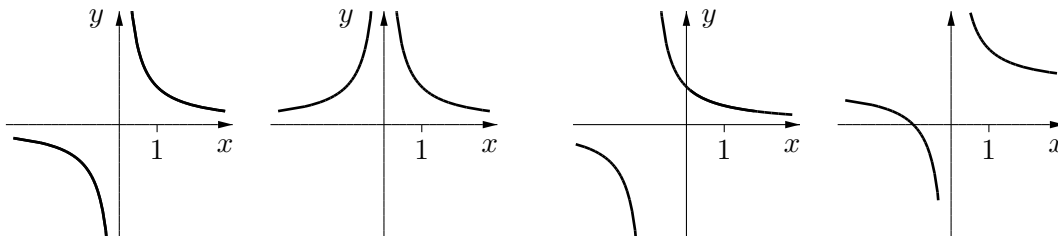


Der Definitionsbereich aller vier Funktionen ist $D = \mathbb{R}$. Für die Wertebereiche gilt:

- i) $W = [0, \infty)$.
- ii) $W = [0, \infty)$
- iii) $W = [0, \infty)$
- iv) $W = [1, \infty)$

Weiterhin gilt $a^{-1}(\{3\}) = \{-3, 3\}$, $b^{-1}(\{3\}) = \{-2, 4\}$, $c^{-1}(\{3\}) = \{-4, 2\}$ und $d^{-1}(\{3\}) = \{2, -2\}$.

b) Graphen von e, f, g, h



- i) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Wertebereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ii) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Wertebereich $W = (0, \infty)$.
- iii) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und Wertebereich $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- iv) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Wertebereich $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 e^{-1}([-2, 1]) &= (-\infty, -\tfrac{1}{2}] \cup [1, \infty) \\
 f^{-1}([-2, 1]) &= [-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\
 g^{-1}([-2, 1]) &= (-\infty, -\tfrac{3}{2}] \cup [0, \infty) \\
 h^{-1}([-2, 1]) &= (-\infty, -\tfrac{1}{3}]
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5)

Die Symmetrieachse ist $x = 5$, also $c = 5$.

Aufgabe 6)

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ und $|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$.

Blatt 5

Aufgabe 1)

a)

$$f(3t) = \frac{1+3t}{2-3t}, \quad f(x-1) = \frac{x}{3-x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{2x-1}$$

b) i)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)^2} + 1} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-1} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ii)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-1)^2 \quad \text{mit } D = \mathbb{R}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x^2 - 1 \quad \text{mit } D = \mathbb{R}$$

Aufgabe 2)

a)

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4y+1}}{2}$$

b) Es existiert keine Umkehrfunktion.

c) Es existiert keine Umkehrfunktion

d)

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Aufgabe 3)

a) Schnittpunkte mit x -Achse: $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Schnittpunkt mit y -Achse: $(0, -1)$.

b) Es gibt keine Schnittpunkte mit der x -Achse. Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0, 1)$.

c) Schnittpunkte mit x -Achse: $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$. Schnittpunkt mit y -Achse: $(0, 0)$.

d) Schnittpunkte mit der x -Achse: $(-1, 0)$, $(-2, 0)$ und $(-3, 0)$. Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0, 6)$.

Aufgabe 4)

a)

$$A \cap B = (0, \frac{3}{2}), \quad A \cup B = (-\infty, 2), \quad A \setminus B = (-\infty, 0].$$

b)

$$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert ein } y \in \mathbb{N} : x = 12y\},$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (\text{Es existiert ein } q \in \mathbb{Z} : x = 4q) \vee (\text{Es existiert ein } p \in \mathbb{N} : x = 3p)\} \\ &= \{\dots, -12, -8, -4, 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in \mathbb{N} \mid (\text{Es existiert ein } p \in \mathbb{N} : x = 3p) \wedge \neg(\text{Es existiert ein } q \in \mathbb{Z} : x = 4q), \} \\ &= \{3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, \dots\} \end{aligned}$$

Aufgabe 5)

$$\mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup [1, \infty).$$

Aufgabe 6)

a) $\mathbb{L} = (-3, 3) \cup (5, 7)$

b) $x \in (-3, -1).$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}.$

Aufgabe 7)

- a) Rechts vom Äquivalenzpfeil müsste eine Aussage stehen, aber $4\sqrt{3}$ ist nur ein Term. Außerdem ist $x = 4\sqrt{3}$ nicht die einzige Lösung von $x^2 = 48$, auch $x = -4\sqrt{3}$ ist eine. Richtig wäre also

$$x^2 = 48 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ oder } x = -4\sqrt{3}.$$

- 2) Auch hier findet man rechts von den Folgerungspfeilen jeweils einen Term anstatt einer Aussage. Es ist noch nicht einmal klar, was genau gemeint ist, vermutlich

$$n = m + 2 \Rightarrow n^3 = (m + 2)^3 \Rightarrow n^3 = m^3 + 6m^2 + 12m + 8.$$

Dann wäre auch die 6 am Ende des rechten Terms falsch.

- c) Zwischen zwei Aussagen kann kein Gleichheitszeichen stehen. Da gehört eine Äquivalenz hin:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$