

Lösung zu den Zusatzaufgaben

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Zusatzaufgabe (ÜB02)

Berechnen Sie folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3} \cdot \left(\sum_{k=0}^3 2^k - \sum_{k=0}^3 (k+1)^2 \right) &= -\frac{4}{3} \cdot \left(\sum_{k=0}^3 2^k - (k+1)^2 \right) = -\frac{4}{3} \cdot [(1-1) + (2-4) + (4-9) + (8-16)] \\ &= -\frac{4}{3} \cdot [0 - 2 - 5 - 8] = -\frac{4}{3}(-15) = 20 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (ÜB03)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

$$a) \frac{(3+y)((x-2)^2 + 4(x-1))}{3x(7(y-1) + 2(5-3y))} : \frac{1}{3x} = \frac{(3+y)(x^2 - 4x + 4 + 4x - 4)}{3x(7y - 7 + 10 - 6y)} \cdot 3x = \frac{(3+y)x^2}{3x(y+3)} \cdot 3x = x^2$$

$$\begin{aligned} b) \frac{\frac{2a \cdot (b^2 - 3b)}{b+3} + \frac{a}{b-3}}{\frac{2ab \cdot (b-3)}{ab-3a+ab+3a}} &= \frac{\frac{2ab \cdot (b-3)}{b^2-9}}{\frac{b+3}{b^2-9}} = \frac{2ab \cdot (b-3)}{b^2-9} \cdot \frac{b-3}{b+3} \\ &= (b^2-9) \cdot \frac{b-3}{b+3} = (b+3) \cdot (b-3) \cdot \frac{b-3}{b+3} = (b-3)^2 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (ÜB04)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

$$a) \sqrt[9]{8} \cdot \sqrt[9]{16} \cdot \sqrt[9]{4} = \sqrt[9]{2^3} \cdot \sqrt[9]{2^4} \cdot \sqrt[9]{2^2} = 2^{\frac{3}{9}} \cdot 2^{\frac{4}{9}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} = 2^{\frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = 2^{\frac{9}{9}} = 2^1 = 2$$

$$b) \frac{\frac{n+m}{m} \cdot n^2 \cdot m^3}{(n^2 - m^2)^{\frac{n}{n-m}}} \cdot \frac{m^{27} \cdot n^7}{m^{28} \cdot n^5 \cdot n^2} = \frac{(n+m) \cdot n^2 \cdot m^2}{(n+m)(n-m) \cdot \frac{n}{n-m}} \cdot \frac{n^7}{m \cdot n^7} = \frac{n^2 \cdot m^2 \cdot (n-m)}{(n-m) \cdot n} \cdot \frac{1}{m} = n \cdot m$$

$$\begin{aligned} c) \left(-a^n - \frac{1}{a^{n-1}} \right)^2 &\stackrel{\text{binom. F.}}{=} (-a^n)^2 - 2(-a^n) \cdot \frac{1}{a^{n-1}} + \left(\frac{1}{a^{n-1}} \right)^2 = (a^n)^2 + 2 \frac{a^n}{a^{n-1}} + \frac{1^2}{a^{2n-2}} \\ &= a^{2n} + 2a^{n-(n-1)} + \frac{1}{a^{2n-2}} = a^{2n} + 2a + a^{-(2n-2)} = a^{2n} + 2a + a^{-2n+2} \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (ÜB05)

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

$$\begin{aligned} a) \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}} &= \frac{\frac{(x-1)(x-1) - (x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x+3} \\ &= \frac{-4x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x+3} = -\frac{4x}{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}}{2 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}} &= \frac{\frac{s^2 - (s^2-1)}{(s^2-1)s^2}}{\frac{2(s-1)(s+1) + (s+1) - (s-1)}{(s-1)(s+1)}} = \frac{1}{s^2(s^2-1)} \cdot \frac{s^2-1}{2(s^2-1)+2} \\
 &= \frac{1}{s^2 \cdot 2(s^2-1+1)} = \frac{1}{2s^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{r^3s^2 + 2r^4s^4 + r^5s^6}{r^3s^3} : \frac{r^2s - r^3s^3}{r^2s^2 - 2r^3s^4 + r^4s^6} &= \frac{r^3s^2(1 + 2rs^2 + r^2s^4)}{r^3s^3} \cdot \frac{r^2s^2(1 - 2rs^2 + r^2s^4)}{r^2s(1 - rs^2)} \\
 &= \frac{(rs^2 + 1)^2(rs^2 - 1)^2}{-(rs^2 - 1)} = (1 - rs^2)(1 + rs^2)^2
 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (ÜB06)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen. Geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\frac{4x^2 - 36}{x^2 - x - 6} : \frac{18 - 2x^2}{x^2 - 4} = \frac{2x - 4}{3 - x}$$

Zuallererst: Wir müssen nachsehen, welche $x \in \mathbb{R}$ wir hier überhaupt einsetzen dürfen!

Erinnerung: Wir dürfen nicht durch Null teilen... wir können keine negativen Wurzeln ziehen etc.

Also: Für $x \in \{-2, 2, 3\}$ wäre einer der Nenner gleich Null, also sind die nicht erlaubt!

Nun vereinfachen wir die Gleichung nacheinander:

① Wir teilen durch einen Bruch, indem wir mit dem Kehrwert mal nehmen:

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 4}{18 - 2x^2} = \frac{2x - 4}{3 - x}$$

② Ausklammern:

$$\Leftrightarrow \frac{-4(9 - x^2)}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 4}{2(9 - x^2)} = \frac{2(x - 2)}{3 - x}$$

③ Kürzen:

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 4}{1} = \frac{2(x - 2)}{3 - x} \Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - 2^2)}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 2)}{3 - x} \xrightarrow{\text{b.j.n. F.}} \frac{-2(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{2(x - 2)}{-(x - 3)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow -2 = -2$$

Wir erhalten eine wahre Aussage und damit (wenn wir unsere Anfangsüberlegung einbeziehen!) die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

Zusatzaufgabe (ÜB07)

Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt[6]{b} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{16a^5}}{2\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot a^2} = \frac{4}{2} \frac{b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot a^2} = 2 \frac{b^{\frac{10}{6}} \cdot a^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{2}}} = 2b^{\frac{10}{6} - \frac{4}{6}} = 2b$$

Zusatzaufgabe (ÜB08)

a) Geben Sie die Zeilenstufenform des gegebenen LGS an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a-2 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & b+1 \end{array}\right)$$

b) Geben Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ an, sodass das LGS ...

i) ... eindeutig lösbar ist:

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 3 = n$ und somit ist das LGS eindeutig lösbar.

ii) ... mehrdeutig lösbar ist:

Für $a = 3$ und $b = -1$ ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2 < 3 = n$ und somit ist das LGS mehrdeutig lösbar.

iii) ... nicht lösbar ist:

Für $a = 3$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist $\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A|b)$ und somit ist das LGS nicht lösbar.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = 3$ und $b = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2 < 3 = n$ und damit ist das LGS mehrdeutig lösbar.

$$(II) -x_2 + x_3 = -2 \xrightarrow{x_3=t, t \in \mathbb{R}} -x_2 + t = -2 \iff -x_2 = -2 - t \iff x_2 = 2 + t$$

$$(I) x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \xrightarrow[x_2=2+t]{x_3=t} x_1 + 2(2+t) + 2t = 1 \iff x_1 + 4 + 2t + 2t = 1 \iff x_1 = -4 - 4t$$

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -4 - 4t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Zusatzaufgabe (ÜB09)

Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$ so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} \frac{y^2(3y)^{-1} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y^3}} \cdot \frac{9x^2 - 3^2}{x^2 - 1} &= \frac{y^2 \cdot y^{-1} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot (y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^2 x^2 - 3^2}{x^2 - 1^2} = \frac{y^{2-1+\frac{1}{2}}}{3y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(3x)^2 - 3^2}{x^2 - 1^2} = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(3x+3)(3x-3)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(3x+3)(3x-3)}{(x+1)(3x-3)} = \frac{3(x+1)}{x+1} = 3 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (ÜB10)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen und geben Sie die Lösungsmenge in korrekter Intervallschreibweise an:

$$\begin{aligned} a) |2x+1| - 5(x+2) &\leq 2(x - |2x+1|) \iff |2x+1| - 5x - 10 \leq 2x - 2|2x+1| \iff 3|2x+1| - 5x - 10 \leq 2x \\ &\iff 3|2x+1| \leq 7x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{Kritische Stellen: } 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Fälle: Fall 1: $x \geq -\frac{1}{2}$, Fall 2: $x < -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Fall 1: } x \geq -\frac{1}{2}}$$

$$3|2x + 1| \leq 7x + 10 \stackrel{x \geq -\frac{1}{2}}{\iff} 3(2x + 1) \leq 7x + 10 \iff 6x + 3 \leq 7x + 10 \iff -7 \leq x$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq -\frac{1}{2}$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$

$$\boxed{\text{Fall 2: } x < -\frac{1}{2}}$$

$$3|2x + 1| \leq 7x + 10 \stackrel{x < -\frac{1}{2}}{\iff} 3(-2x - 1) \leq 7x + 10 \iff -6x - 3 \leq 7x + 10 \iff -1 \leq x$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < -\frac{1}{2}$ liefert: $\mathbb{L}_2 = \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; \infty\right) = [-1; \infty)$

b) $\frac{2x - 2}{|x - 3|} \leq 1$ mit der kritischen Stelle $x = 3$:

- i) Überlegen Sie sich, was in der kritischen Stelle $x = 3$ mit dem Ausdruck $\frac{2x - 2}{x - 3}$ passiert.
Was fällt auf?

In der kritischen Stelle $x = 3$ wird der Nenner 0 und somit darf $x = 3$ nicht angenommen werden.

- ii) Stellen Sie auf Grundlage von i) Ihre Fälle auf und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Betragsungleichung erfüllen:

Fälle: Fall 1: $x > 3$, Fall 2: $x < 3$

$$\boxed{\text{Fall 1: } x > 3}$$

$$\frac{2x - 2}{|x - 3|} \leq 1 \stackrel{x > 3}{\iff} \frac{2x - 2}{(x - 3)} \leq 1 \iff 2x - 2 \leq x - 3 \iff x \leq -1$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x > 3$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \emptyset$

$$\boxed{\text{Fall 2: } x < 3}$$

$$\frac{2x - 2}{|x - 3|} \leq 1 \stackrel{x < 3}{\iff} \frac{2x - 2}{-(x - 3)} \leq 1 \iff 2x - 2 \leq -x + 3 \iff 3x \leq 5 \iff x \leq \frac{5}{3}$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < 3$ liefert: $\mathbb{L}_2 = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup \emptyset = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$

Zusatzaufgabe (ÜB11)

Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(3 + y)((x - 2)^2 + 4(x - 1))}{3x(7(y - 1) + 2(5 - 3y))} : (3x)^{-1} = \frac{(3 + y)(x^2 - 4x + 4 + 4x - 4)}{3x(7y - 7 + 10 - 6y)} : \frac{1}{3x} = \frac{(3 + y)x^2}{3x(y + 3)} \cdot 3x = x^2$$

Zusatzaufgabe (ÜB12)

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion $h(x)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\sin(2x\alpha)}{4}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{x \cdot e^{\tan(x)}}_{\textcircled{3}}$$

Wir leiten summandenweise ab:

$$\textcircled{1} \quad [(\cos(\alpha))]' = \frac{d}{dx}[\cos(\alpha)] = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4} \sin(2x\alpha) \right] = \frac{2\alpha}{4} \cos(2x\alpha) = \frac{\alpha \cdot \cos(2x\alpha)}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d}{dx} [x \cdot e^{\tan(x)}] \text{ mit Produktregel: } u(x) = x \quad v(x) = e^{\tan(x)}$$

$$u'(x) = 1 \quad v'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\tan(x)]$$

Mit Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right] = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \stackrel{\text{trig. Pyth.}}{=} \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\text{Also: } v'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ und damit: } \textcircled{3} \quad \frac{d}{dx} [x \cdot e^{\tan(x)}] = 1 \cdot e^{\tan(x)} + x \cdot e^{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = e^{\tan(x)} \left(1 + \frac{x}{\cos^2(x)} \right)$$

$$\text{Insgesamt: } h'(x) = \frac{\alpha \cdot \cos(2x\alpha)}{2} + e^{\tan(x)} \left(1 + \frac{x}{\cos^2(x)} \right)$$

Zusatzaufgabe (ÜB13)

Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\frac{[e^{2x+y} + e^x - \ln(x^2) - e^{y+2x} + 2 \ln(x)] \cdot \ln(y)}{6 \ln(y^2) \cdot e^{-y+x} \cdot e^y + e^{\ln(e)+x} \cdot \ln(y)} = \frac{[e^x - 2 \ln(x) + 2 \ln(x)] \cdot \ln(y)}{\ln(y) \cdot (12e^x + e^{1+x})} = \frac{e^x \cdot \ln(y)}{e^x \cdot \ln(y) \cdot (12 + e)} = \frac{1}{12 + e}$$