

Lösung zum 1. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 1 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Mengenschreibweisen)

a) Schreiben Sie die folgenden Mengen um, indem Sie die Elemente aufzählen:

i) $M_1 = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid -2 \leq x < \frac{14}{3}\}$

Vorgehensweise:

- ① Wir suchen alle x aus den natürlichen Zahlen mit der Null, die zwischen -2 und $\frac{14}{3}$ liegen.
- ② Wir gucken uns die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ an,
wobei der Index bei $\mathbb{N}_0$ anzeigt, dass wir die 0 mit dazunehmen.
- ③ Um die $\frac{14}{3}$ abzuschätzen, gucken wir, wie oft die 3 im Nenner in die 14 im Zähler passt.
Damit wissen wir, dass $\frac{14}{3} (= 4,66)$ etwas größer ist als 4.
- ④ Insgesamt haben wir in der Menge aller natürlichen Zahlen mit der Null,
die zwischen 0 und 4 liegen.

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

ii) $M_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid -12 \leq n \leq 2 \wedge 8 < n < 18\}$

Wenn wir uns die beiden Intervalle anschauen, sehen wir, dass es keine n gibt, die beide Forderungen erfüllen, also:

$$M_2 = \emptyset$$

iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade und ist Teiler von 18 (ohne Rest)}\}$

Teiler von 18: $\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ und davon die geraden Zahlen:

$$M_3 = \{-18, -6, -2, 2, 6, 18\}$$

iv) $M_4 = \{w \in \mathbb{Q} \mid (w^2 - 9) \cdot (\pi - w) = 0\}$

Damit ein Produkt 0 wird, muss einer der Faktoren 0 werden, also:

$$w^2 - 9 = 0 \quad \vee \quad \pi - w = 0 \iff w^2 = 9 \quad \vee \quad w = \pi \iff |w| = 3 \quad \vee \quad w = \pi$$

$$\iff w = 3 \vee w = -3 \quad \vee \quad w = \pi$$

Jetzt müssen wir überprüfen, ob die Lösungen auch die Bedingung $z \in \mathbb{Q}$ erfüllen:

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthalten alle Brüche $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

$$w = 3 \in \mathbb{Q}, \quad w = -3 \in \mathbb{Q}, \quad w = \pi \notin \mathbb{Q}$$

Hinweis: π ist Teil der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, da π nicht als Bruch dargestellt werden kann.

$$\text{Also: } M_4 = \{-3, 3\}$$

b) Schreiben Sie die folgenden Mengen um, indem Sie die Mengenvorschrift herausfinden:

i) $M_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Was fällt auf? Wir haben ganze Zahlen, beginnend bei -2 , also:

$$M_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2\} = \mathbb{Z}_{\geq -2}$$

ii) $M_6 = \{\dots, -15, -12, -9, -6, -3, 0\}$

Was fällt auf? Wir haben ganze Zahlen kleiner oder gleich Null, die Vielfache von -3 sind:

$$-3 \cdot 0 = 0, \quad -3 \cdot 1 = -3, \quad -3 \cdot 2 = -6, \quad -3 \cdot 3 = -9, \dots \quad \text{also:}$$

$$M_6 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = -3 \cdot k, k \in \mathbb{N}_0\}$$

iii) $M_7 = \{-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$

Was fällt auf? Die Zahlen lassen sich darstellen als $k^2 - 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$:

$$0^2 - 1 = -1, \quad 1^2 - 1 = 0, \quad 2^2 - 1 = 3, \quad 3^2 - 1 = 8, \dots$$

$$M_7 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2 - 1, k \in \mathbb{N}_0\}$$

iv) $M_8 = \{-4, 9, -16, 25, -36, 49, -64, 81, -100, \dots\}$

Was fällt auf? Wir haben ein wechselndes Vorzeichen (wir nennen das "alternierender Faktor"), und wir haben Quadratzahlen:

$$M_8 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^{k+1} \cdot k^2, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$$

Aufgabe 2 (Mengenlehre / Mengenoperationen)

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Beziehungen gültig sind:

i) $A = \{7, 8, 9\} \neq \{4, 7, 8, 9\} = B$. WAHR.

ii) $A = \{7, 8, 9\} \subset \{4, 7, 8, 9\} = B$. WAHR.

iii) $A = \{7, 8, 9\} \subseteq \{5, 6, 7, 8, 9\}$. WAHR.

iv) $A = \{7, 8, 9\} \subsetneq \{\} = D$. FALSCH.

Hinweis: Für jede beliebige Menge A gilt: $\{\} \subset A$ und $A \subset A$.

v) $B = \{4, 7, 8, 9\} \subsetneq \{5, 6, 7, 8, 9\} = C$. FALSCH, da $4 \notin C$.

b) Bilden Sie die folgenden Mengen:

i) $A \cap B = \{7, 8, 9\} \cap \{4, 7, 8, 9\} = \{7, 8, 9\}$

Wir betrachten alle Elemente die in A und in B sind.

ii) $A \cup C = \{7, 8, 9\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Wir betrachten alle Elemente die in A oder in B sind.

iii) $A \cap C = \{7, 8, 9\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{7, 8, 9\}$

iv) $C \setminus A = \{5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{7, 8, 9\} = \{5, 6\}$

Wir betrachten alle Elemente, die aus der Menge C sind, aber nicht in der Menge A sind.

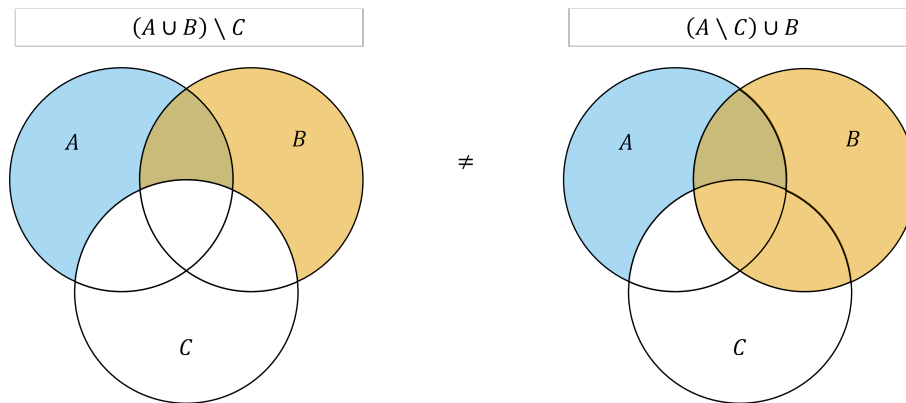
v) $A \cup D = \{7, 8, 9\} \cup \{\} = \{7, 8, 9\} = A$

Aufgabe 3 (Venn-Diagramme)

Überprüfen Sie mit Hilfe von Venn-Diagrammen, ob die folgenden Gleichheiten gelten:

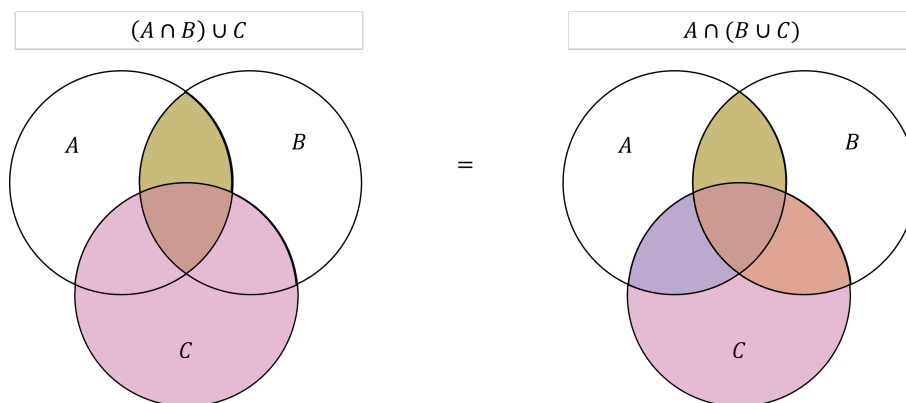
Hinweis: Ein Venn-Diagramm dient nur zur Veranschaulichung... oder, um ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Man kann damit **NICHT** mathematisch beweisen!

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$



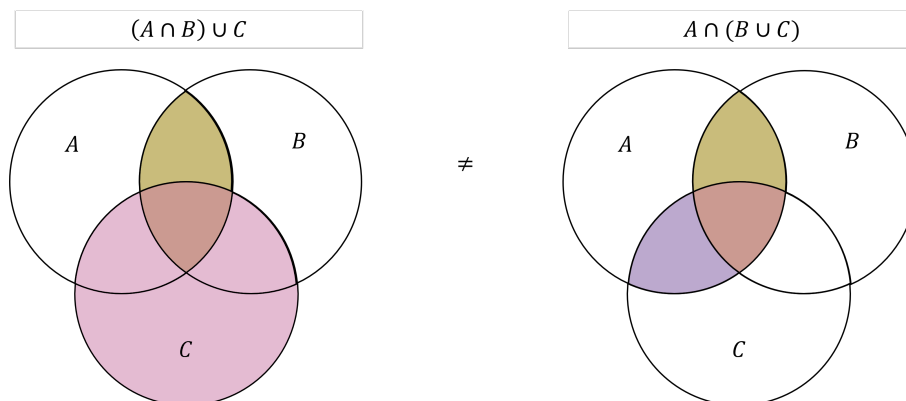
Die Aussage ist falsch.

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$



Die Aussage ist wahr.

c) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$



Die Aussage ist falsch.