

Lösung zum 2. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

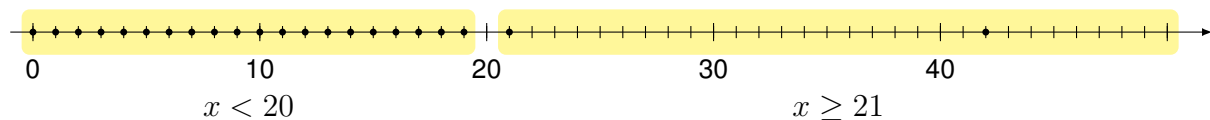
Kapitel 2 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Quantoren)

Formulieren Sie die folgenden mathematischen Aussagen in ganze Sätze um und entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \geq 21 \vee n < 20$

Für alle n aus den natürlichen Zahlen soll also gelten, dass n größer oder gleich 21 oder n echt kleiner als 20 ist.



Die Aussage ist FALSCH.

Erklärung: Es sieht so aus, als würde die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten... aber für $n = 20$ klappt es nicht. Also ist die Aussage FALSCH. Hinweis: Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{20\}$ wäre die Aussage WAHR.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \vee x = y \vee x > y$

Für alle x und y aus den reellen Zahlen gilt, dass x kleiner y ist, oder x gleich y ist, oder x größer y ist.

Die Aussage ist WAHR. (Man sagt: $\mathbb{R}$ ist geordnet).

Denn seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann ist x entweder kleiner als y oder x ist gleich y oder x ist größer y .

Die Aussage gibt einfach nur eine Aussage darüber, dass wir über zwei Zahlen aus den reellen Zahlen den Vergleich ziehen können, ob die eine kleiner, gleich oder größer ist als die andere.

Aufgabe 2 (Summen und Produkte)

a) Schreiben Sie die folgenden Summen und Produkte aus und fassen Sie zusammen:

$$\text{i) } \sum_{k=0}^3 (2^k - 4k) = \underbrace{(2^0 - 4 \cdot 0)}_{k=0} + \underbrace{(2^1 - 4 \cdot 1)}_{k=1} + \underbrace{(2^2 - 4 \cdot 2)}_{k=2} + \underbrace{(2^3 - 4 \cdot 3)}_{k=3} = 1 + (-2) + (-4) + (-4) = -9$$

$$\text{ii) } \prod_{k=-2}^0 2^{3(k+2)} = \underbrace{2^{3(-2+2)}}_{k=-2} \cdot \underbrace{2^{3(-1+2)}}_{k=-1} \cdot \underbrace{2^{3(0+2)}}_{k=0} = 2^0 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 1 \cdot 8 \cdot 64 = 512$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \prod_{k=1}^2 \sum_{l=1}^k ((-1)^{k+l} + 2) &= \left[\sum_{l=1}^1 ((-1)^{1+l} + 2) \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^2 ((-1)^{2+l} + 2) \right] \\ &= \left[\underbrace{((-1)^{1+1} + 2)}_{l=1} \right] \cdot \left[\underbrace{((-1)^{2+1} + 2)}_{l=1} + \underbrace{((-1)^{2+2} + 2)}_{l=2} \right] = 3 \cdot (1 + 3) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \sum_{l=1}^3 \prod_{k=1}^l (l+1) &= \left[\prod_{k=1}^1 (1+1) \right] + \left[\prod_{k=1}^2 (2+1) \right] + \left[\prod_{k=1}^3 (3+1) \right] \\
 &= \left[\underbrace{2}_{k=1} \right] + \left[\underbrace{3}_{k=1} \cdot \underbrace{3}_{k=2} \right] + \left[\underbrace{4}_{k=1} \cdot \underbrace{4}_{k=2} \cdot \underbrace{4}_{k=3} \right] = 2 + 9 + 64 = 75
 \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie die Summen und Produkte in verkürzter Form:

$$\text{i) } 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = \sum_{k=3}^{10} (2k+1)$$

Wir haben ungerade Zahlen, die sich allgemein als $2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ darstellen lassen.

Da wir ab 7 aufaddieren, müssen wir unsere Summe bei $k=3$ starten lassen, weil $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Genau so endet unsere Summe dann bei $k=10$.

$$\text{ii) } 4 - 9 + 16 - 25 + 36 - 49 + 64 - 81 = \sum_{k=2}^9 (-1)^k \cdot k^2$$

Wir haben Quadratzahlen (k^2 mit $k \in \mathbb{N}$) mit wechselndem Vorzeichen (alternierender Faktor $(-1)^k$).

$$\text{iii) } (4) \cdot (4+8) \cdot (4+8+16) \cdot (4+8+16+32) = \prod_{k=2}^5 \sum_{l=2}^k 2^l$$

Wir haben aufsummierte Zweierpotenzen, deren Summen nochmal multipliziert werden.

c) Schreiben Sie die Summen und Produkte mittels Index-Transformation um:

$$\text{i) } \sum_{k=2}^5 (k+2) \cdot a^{k-1} = \sum_{k=0}^3 (k+4) \cdot a^{k+1} = \sum_{k=-2}^1 (k+6) \cdot a^{m+3} = \sum_{k=5}^8 (k-1) \cdot a^{k-4}$$

$$\text{ii) } \prod_{k=1}^4 (2k+1) = \prod_{k=3}^6 (2k-3) = \prod_{k=-1}^2 (2k+5) = 3 \cdot 5 \cdot \prod_{k=1}^2 (2k+5)$$