

Lösung zum 4. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 4 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Potenzrechnung)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

Rechenregeln:

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & (a^m)^n = a^{m \cdot n} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0) & (ab)^n = a^n \cdot b^n & \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) & a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) & a^0 = 1 \end{array}$$

a) $4^3 \cdot 16^2 = 4^3 \cdot (4^2)^2 = 4^3 \cdot 4^4 = 4^{3+4} = 4^7$

b) $(3^4)^2 \cdot (3^2)^{-4} = 3^8 \cdot 3^{-8} = 3^{8+(-8)} = 3^0 = 1$

c) $8^9 : 64^4 = 8^9 : (8^2)^4 = 8^9 : 8^8 = 8^{9-8} = 8^1 = 8$

d) $\sqrt[3]{4^{-2}} \cdot \sqrt[4]{4^{-3}} = 4^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} = 4^{-\frac{2}{3} + (-\frac{3}{4})} = 4^{-\frac{8}{12} - \frac{9}{12}} = 4^{-\frac{17}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{4^{17}}}$

e) $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 2}}{\sqrt{\sqrt{16}}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

f) $\frac{65 \cdot 8^n - 8^n}{8^{n+2}} = \frac{8^n(65 - 1)}{8^n \cdot 8^2} = \frac{64}{64} = 1$

g) $\frac{x^{m+3}y^n}{x^{m-3}y^{n+3}} = \frac{x^{m+3}y^n}{x^{m-3}y^ny^3} = \frac{x^{m+3-(m-3)}}{y^3} = \frac{x^6}{y^3}$

h) $\frac{(ab)^2}{a^3b - a^2b^3} = \frac{a^2b^2}{a^2b(a - b^2)} = \frac{b}{a - b^2}$

i) $\frac{x^4 \cdot y^4}{(x^2y)^3 + x^4y^3} = \frac{x^4y^4}{x^6y^3 + x^4y^3} = \frac{x^4y^4}{x^4y^3(x^2 + 1)} = \frac{y}{x^2 + 1}$

j) $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} = \frac{(25x^3y^{-6})^2}{(15x^2y^{-3})^4} = \frac{25^2x^6y^{-12}}{15^4x^8y^{-12}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot x^2} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81x^2}$

Aufgabe 2 (Binomische Formeln)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $\frac{a^2 - b^2}{-a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{-(a - b)} = -(a + b)$

b) $\frac{a - b}{b} \cdot \frac{3ab - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a - b}{b} \cdot \frac{b(3a - b)}{(a - b)^2} = \frac{3a - b}{a - b}$

c) $\frac{x^4 + 18x^2 + 82}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^4 + 18x^2 + 81 + 1}{(x^2 + 9)^2} = \frac{(x^2 + 9)^2 + 1}{(x^2 + 9)^2} = \frac{(x^2 + 9)^2}{(x^2 + 9)^2} + \frac{1}{(x^2 + 9)^2} = 1 + \frac{1}{(x^2 + 9)^2}$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{(x-y)(x^2-1)}{2b^2-2a^2} \cdot \frac{8a^2-8b^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x^2-1)}{2(b^2-a^2)} \cdot \frac{8(a^2-b^2)}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x-y)(x^2-1)}{2(b^2-a^2)} \cdot \frac{-8(b^2-a^2)}{(x+y)(x-y)} \\ & = \frac{-4(x^2-1)}{x+y} \end{aligned}$$