

Lösung zum 5. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 5 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Bruchrechnung und Potenzrechnung)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

$$a) \frac{12a^2xy + 39ax^2y - 27axy^2}{3axy} = \frac{3axy(4a + 13x - 9y)}{3axy} = 4a + 13x - 9y$$

$$b) \frac{22ax^2y^2}{27brs^2} : \frac{66x^2y}{18r^2s} = \frac{22ax^2y^2}{27brs^2} \cdot \frac{18r^2s}{66x^2y} = \frac{2ary}{9bs}$$

$$c) 1 - \frac{u}{1 - \frac{u}{u+1}} = 1 - \frac{u}{\frac{u+1-u}{u+1}} = 1 - \frac{u}{1} \cdot \frac{u+1}{1} = -u^2 - u + 1$$

$$d) \frac{2x}{xy - y^2} + \frac{2y}{xy - x^2} - \frac{x+y}{xy} = \frac{2x}{y(x-y)} + \frac{2y}{x(y-x)} - \frac{x+y}{xy} = \frac{2x}{y(x-y)} - \frac{2y}{x(x-y)} - \frac{x+y}{xy}$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2 - (x+y)(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{2x^2 - 2y^2 - (x^2 - y^2)}{xy(x-y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy(x-y)} = \frac{(x+y)(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{x+y}{xy}$$

$$e) \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \sqrt{x - y}$$

$$f) \sqrt[3]{\frac{x^8}{y^7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^5}} = \sqrt[3]{\frac{x^9}{y^{12}}} = \left(\frac{x^9}{y^{12}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{x^3}{y^4}$$

$$g) (\sqrt{3x} - \sqrt{12x}) : \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{4})}{\sqrt{x}} = \sqrt{3}(1 - 2) = -\sqrt{3}$$

$$h) \sqrt{xy^2} - 5\sqrt{x^2y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{y^2} - 5\sqrt{x^2}\sqrt{y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x}|y| - 5|x|\sqrt{y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x} = \sqrt{x}(|y| - 10y) + \sqrt{y}(8x - 5|x|)$$

$$i) \sqrt[4]{x^m} \cdot \sqrt[n]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{m}{4}} \cdot x^{\frac{3}{n}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{m}{4} + \frac{3}{n} + \frac{2}{3}} = x^{\frac{3mn+36+8n}{12n}} = \sqrt[12n]{x^{3nm+36+8n}}$$

Aufgabe 2 (Rechenregeln der e-Funktion und des natürlichen Logarithmus)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

Rechenregeln: $(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, $(b \neq 0)$ $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$, $(a > 0, b > 0)$
--

$$a) \frac{-3\ln(y) + 4\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln(y^2) + 2\ln(x^2)}{4e^{3x+y} \cdot 2e^{-(x-y)} \cdot 2e^{-x-2y}} = \frac{-3\ln(y) + 4(\ln(y) - \ln(x)) - 2\ln(y) + 2 \cdot 2\ln(x)}{4e^{3x}e^y \cdot 2e^{-x+y} \cdot 2e^{-x}e^{-2y}}$$

$$= \frac{-3\ln(y) + 4\ln(y) - 4\ln(x) - 2\ln(y) + 4\ln(x)}{16e^{3x+y-x+y-x-2y}} = \frac{-\ln(y)}{16e^x}$$

$$b) \frac{2\ln(y) + 6^5 + \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) - 2\ln(x) + \ln(y)}{6 \cdot e^{2x+y} \cdot 3e^{-(x-y)} \cdot 2e^{-x-2y} \cdot 6^2} = \frac{2\ln(y) + 6^5 + \ln(x^2) - \ln(y^3) - 2\ln(x) + \ln(y)}{6e^{2x} \cdot e^y \cdot 3e^{-x}e^y \cdot 2e^{-x} \cdot e^{-2y} \cdot 6^2}$$

$$= \frac{3\ln(y) + 6^5 + 2\ln(x) - 3\ln(y) - 2\ln(x)}{6 \cdot 6^3 \cdot e^{2x-x-x} \cdot e^{y+y-2y}} = \frac{6^5}{6^4} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{6 \cdot (\ln(x^2) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln(x) - \ln(y^{-1}))}{4e^{-x+y} \cdot \ln(x) + 2e^{y-x} \cdot \ln(x)} = \frac{6 \cdot (2\ln(x) + \ln(x) - \ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y))}{\ln(x)(4e^{y-x} + 2e^{y-x})} = \frac{6 \cdot \ln(x)}{6e^{y-x} \cdot \ln(x)} \\ & = \frac{1}{e^{y-x}} = e^{-(y-x)} = e^{x-y} \end{aligned}$$