

Lösung zum 6. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

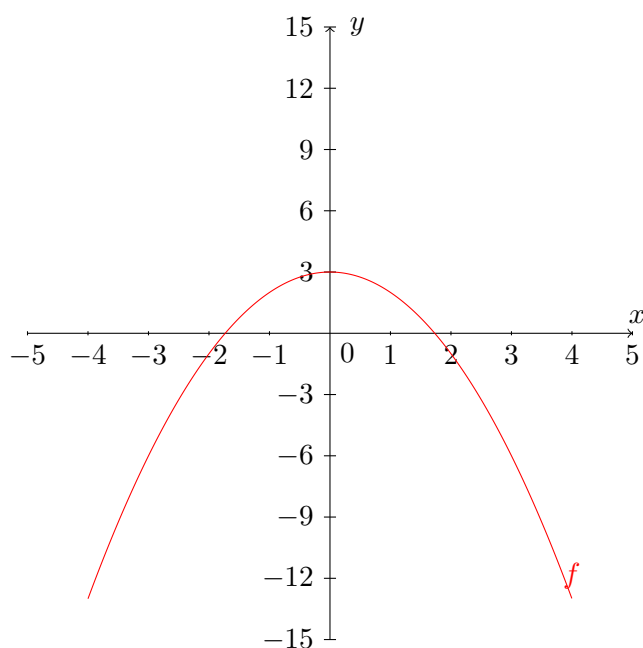
hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

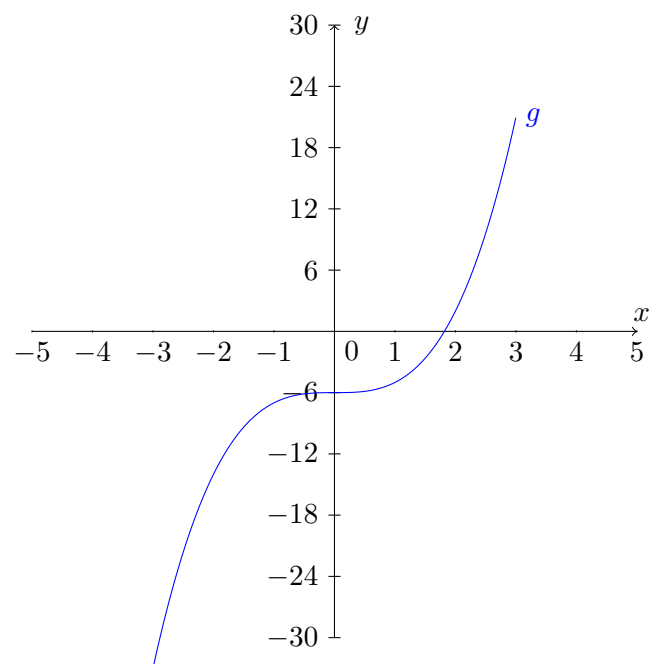
Kapitel 6 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Graph, Bild und Urbild)

a) Fertigen Sie eine Wertetabelle für die Funktionen f bzw. g an und vervollständigen Sie die Teilgraphen:



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	-33	-14	-7	-6	-5	2	21

b) Geben Sie das Bild von f bzw. g an, also alle Werte, die tatsächlich erreicht werden.

Anhand der Zeichnungen lässt sich erkennen, dass das Bild von f dem Intervall $(-\infty; 3]$ entspricht.

Es gilt also: $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{\leq 3}$

Anhand der Zeichnungen lässt sich erkennen, dass das Bild von g alle reellen Zahlen entspricht.

Es gilt also: $\text{Bild}(g) = \mathbb{R}$

c) Geben Sie das Urbild der Mengen $\mathbb{R}_{\leq 3}$ bzw. $\mathbb{R}_{\leq 0}$ unter der Abbildung f an. Geben Sie außerdem das Urbild der Mengen $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\leq -6}$ unter der Abbildung g an.

Es gilt: $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 3}) = \mathbb{R}$ sowie $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}) = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$

Es gilt: $g^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sowie $g^{-1}(\mathbb{R}_{\leq -6}) = \mathbb{R}_{\leq 0}$

Aufgabe 2 (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv und Umkehrabbildungen)

Injektiv	Jeder Wert aus dem Wertebereich wird höchstens einmal getroffen
Surjektiv	Jeder Wert aus dem Wertebereich wird mindestens einmal getroffen.
Bijektiv	Die Abbildung ist sowohl injektiv als auch surjektiv.

- a) Entscheiden Sie nur anhand der Graphen in den Zeichnungen, ob die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist:

Für f gilt: f ist nicht injektiv, da es bspw. zu $f(x) = y = 1$ zwei Urbilder gibt, also zwei $x \in \mathbb{R}_{\geq -2}$ mit $f(x) = 1$. Es gilt nämlich $f(-2) = 1 = f(2)$.

f ist nicht surjektiv, da es bspw. für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}_{\geq -2}$ gibt mit $f(x) = -1$. Also ist f auch nicht bijektiv.

Für g gilt: g ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv.

Für h gilt: h ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv.

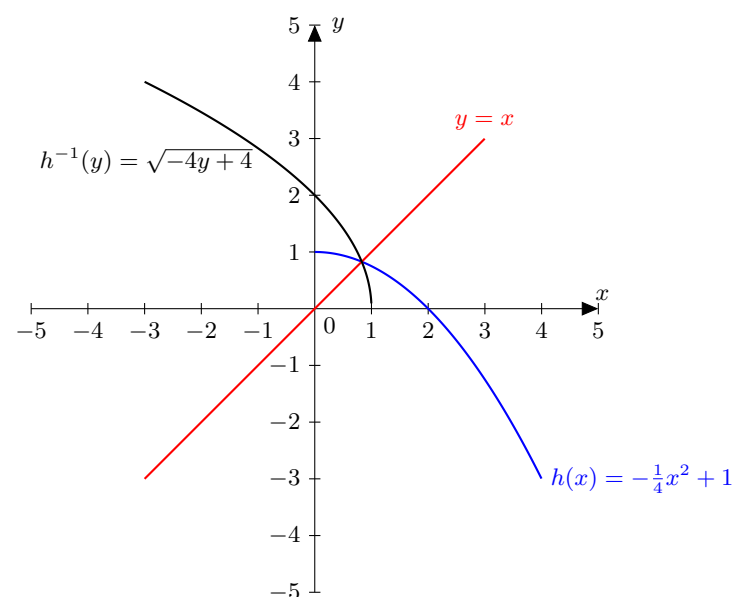
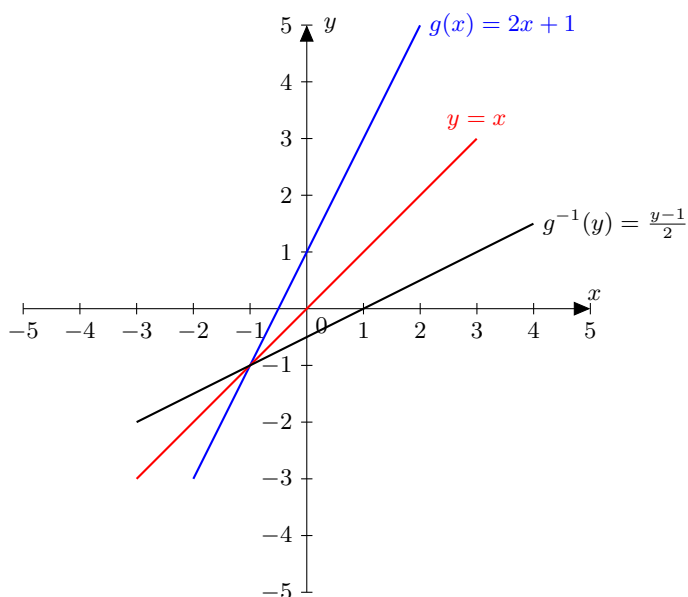
Für j gilt: j ist injektiv, aber nicht surjektiv, da es bspw. für $y = 3$ kein $x \in [-2; 2]$ gibt mit $j(x) = 3$. Also ist j auch nicht bijektiv.

- b) Überlegen Sie sich für welche Abbildungen aus a) die Umkehrabbildung existiert. Was muss dafür gelten? Bestimmen Sie diese dann jeweils graphisch und rechnerisch:

Da g und h bijektiv sind, existieren für diese Abbildungen die Umkehrabbildung.

Graphisch:

Für die graphische Bestimmung der Umkehrabbildung wird $g(x)$ bzw. $h(x)$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt:



Rechnerisch:

Für die rechnerische Bestimmung der Umkehrabbildung bilden wir die Umkehrfunktion, indem wir $g(x) = y = 2x + 1$ bzw. $h(x) = y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ nach x umstellen:

Für $g(x)$:

$$g(x) = y = 2x + 1 \iff y - 1 = 2x \iff \frac{y - 1}{2} = x$$

Danach geben wir die Umkehrabbildung mit getauschtem Definitions- und Wertebereich an:

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$$

Für $h(x)$:

$$h(x) = y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \iff y - 1 = -\frac{1}{4}x^2 \iff -4 \cdot (y - 1) = x^2 \iff \sqrt{-4y - 4} = |x| \xLeftrightarrow{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{-4y - 4} = x$$

$$h^{-1} : \mathbb{R}_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } h(y) = \sqrt{-4y - 4}$$