

Lösung zum 7. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 7 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Gleichungen lösen)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $4x + 4 = -4x - 8 \iff 8x + 4 = -8 \iff 8x = -12 \iff x = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$, also $\mathbb{L} = \{-\frac{3}{2}\}$.

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \iff \frac{3x + 2x}{6} = 10 \iff 3x + 2x = 60 \iff 5x = 60 \iff x = \frac{60}{5} = 12$, also $\mathbb{L} = \{12\}$.

Aufgabe 2 (Nullstellen und Linearfaktorzerlegung)

a) Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Gleichungen jeweils mit der pq-Formel und quadratischen Ergänzung:

i) Mit pq-Formel:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{pq-Formel} \iff x_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\iff x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Die Nullstellen lauten also: $x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = 2$

Hinweis: $(-5)^2 = 25 \neq -5^2 = -25$

Mit quadr. Ergänzung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\iff \left(x^2 - 5x + \left(\frac{-5}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{-5}{2} \right)^2 + 6 = 0 \stackrel{\text{binom. F.}}{\iff} \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4} - 6 \iff \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \vee x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \vee x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Die Nullstellen lauten also: $x_1 = 3 \wedge x_2 = 2$

ii) Mit pq-Formel:

$$2x^2 + 8x - 42 = 0$$

Für die pq-Formel muss der Leitkoeffizient 1 sein, deswegen beide Seiten $\cdot \frac{1}{2}$ rechnen.

$$\iff x^2 + 4x = 0 \stackrel{\text{pq-Formel}}{\iff} x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 21} = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm \sqrt{25}$$

$$\iff x_1 = 3 \wedge x_2 = -7$$

Mit quadr. Ergänzung:

$$2x^2 + 8x - 42 = 0$$

$$\iff x^2 + 4x - 21 = 0 \iff \left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{4}{2} \right)^2 - 21 = 0 \iff (x + 2)^2 = 25$$

$$\iff x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5 \iff x_1 = 3 \wedge x_2 = -7$$

$$\text{iii) } x(x-3) = 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

Mit pq-Formel:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{pq-Formel}} x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \iff x_1 = \frac{8}{2} = 4 \wedge x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

Mit quadr. Ergänzung:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff \left(x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{-3}{2} \right)^2 - 4 \iff \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\iff x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \vee x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \iff x_1 = \frac{8}{2} = 4 \wedge x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

b) Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Gleichungen mithilfe binomischer Formeln (bzw. dem Satz von Vieta):

$$\text{i) } 2x^2 - 8x = 0 \iff 2x(x-4) = 0 \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = 4$$

$$\text{ii) } x^2 - 7x + 12 = 0 \iff (x-3)(x-4) = 0 \iff x_1 = 3 \wedge x_2 = 4$$

$$\text{iii) } 3x^2 + 27x + 60 = 0 \iff x^2 + 9x + 20 = 0 \iff (x+4)(x+5) = 0 \iff x_1 = -4 \wedge x_2 = -5$$

$$\text{iv) } x^2 - 3x + 3 = x - 1 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff (x-2)(x-2) = 0 \iff x_1 = x_2 = 2$$

Aufgabe 3 (Polynome höherer Ordnung)

Geben Sie die Lösungsmengen an. Bestimmen Sie also alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung gilt:

$$\text{a) } x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \iff x(x^2 + 2x - 8) = 0 \iff x = 0 \vee x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{pq-Formel}} x = 0 \vee x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{9} \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = -4$$

$$\text{b) } x^4 - 8x^2 + 16 \xrightarrow[t:=x^2]{\text{Subst.}} t^2 - 8t + 16 = 0 \iff (t-4)^2 = 0 \iff t_1 = t_2 = 4$$

Rücksubst.:

$$t_1 = 4: x^2 = 4 \iff |x| = 2 \iff x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$$

$$t_2 = 4: x^2 = 4 \iff x_3 = 2 \wedge x_4 = -2$$

Die Nullstellen lauten also: $x_1 = x_3 = 2 \wedge x_2 = x_4 = -2$

$$\text{c) } x^5 - 18x^3 + 81x = 0 \iff x(x^4 - 18x^2 + 81) = 0 \xrightarrow{\text{binom. Formel}} x(x^2 - 9)^2 = 0$$

$$\iff x(x^2 - 9)^2 = 0$$

$$\iff x((x-3)(x+3))^2 = 0$$

$$\iff x(x-3)^2(x+3)^2 = 0$$

$$\iff x_1 = 0 \wedge x_2 = x_3 = 3 \wedge x_4 = x_5 = -3$$

$$\text{d) } x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow[t:=x^2]{\text{Subst.}} t^2 - 10t + 9 = 0 \iff (t-9)(t-1) = 0 \iff t_1 = 9 \wedge t_2 = 1$$

Rücksubst.:

$$t_1 = 9: x^2 = 9 \iff |x| = 3 \iff x_1 = 3 \wedge x_2 = -3$$

$$t_2 = 1: x^2 = 1 \iff |x| = 1 \iff x_3 = 1 \wedge x_4 = -1$$

e) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 10x^2 + x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} &\iff (x^5 - 5x^4) + (2x^3 - 10x^2) + (x - 5) = 0 \\ &\iff x^4(x - 5) + 2x^2(x - 5) + (x - 5) = 0 \\ &\iff (x - 5)(x^4 + 2x^2 + 1) = 0 \\ &\iff (x - 5)(x^2 + 1)^2 \\ &\iff x = 5 \vee (x^2 + 1)^2 = 0 \end{aligned}$$