

Lösung zum 8. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 8 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)

a) Betrachten Sie eine quadratische Matrix A in Zeilenstufenform und nennen Sie die Bedingung, die gelten muss, dass das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$

- i) lösbar ist: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$
- ii) eindeutig lösbar ist: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = n$
- iii) mehrdeutig lösbar ist: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) < n$

b) Gegeben sei das folgende LGS in erweiterter Koeffizienten-Matrix $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & d \end{array} \right)$

Nutzen Sie die zuvor aufgestellten Bedingungen und geben Sie alle $c, d \in \mathbb{R}$ an, sodass das LGS

i) eindeutig lösbar ist:

LGS eindeutig lösbar $\iff n = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$

Für $n = 2$ gilt: $2 = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$

Dafür darf die letzte Zeile der ZSF von A nicht komplett 0 werden.

Also: $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar $\forall d \in \mathbb{R}$.

ii) mehrdeutig lösbar ist:

LGS mehrdeutig lösbar $\iff n > \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$

Für $n = 2$ gilt: $2 > \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$

Dafür muss die letzte Zeile von $(A|b)$ komplett 0 werden. Also nur für $c = 0$ und $d = 0$ ist das LGS mehrdeutig lösbar.

iii) nicht lösbar:

LGS nicht lösbar $\iff \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$

Es muss in dem Fall gelten: $\text{Rang}(A) = 2 \neq 1 = \text{Rang}(A|b)$.

Also: Für $c = 0$ und $\forall d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das LGS nicht lösbar.

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie an, ob es eindeutig, mehrdeutig oder nicht lösbar ist:

a) ① Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen:

$$\begin{array}{lcl} 3x_1 + 4x_2 = & -1 & \\ 2x_1 + 5x_2 = & -3 & \end{array} \iff \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{array} \right)}_{=:(A|b)}$$

② Zeilenstufenform bilden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \end{array} \right)$$

③ Lösbarkeit prüfen:

$\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A|b) = 2 = n$ und damit ist das LGS eindeutig lösbar.

④ Lösung bestimmen:

$$(II) \frac{7}{3}x_2 = -\frac{7}{3} \iff x_2 = -1$$

$$(I) 3x_1 + 4x_2 = -1 \xrightarrow{x_2=-1} x_1 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) ① Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 & = & 11 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 5 \end{array} \iff \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right)}_{=:(A|b)}$$

② Zeilenstufenform bilden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 7 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-\frac{7}{6})} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -7 \end{array} \right)$$

③ Lösbarkeit prüfen:

$\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A|b)$ und damit ist das LGS nicht lösbar.

④ Lösung angeben:

$$\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$$

c) ① Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ -2x_1 + -6x_2 + 8x_3 & = & 20 \end{array} \iff \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 8 & 20 \end{array} \right)}_{=:(A|b)}$$

② Zeilenstufenform bilden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 8 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(3)} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 & 28 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

③ Lösbarkeit prüfen: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2 < 3 = n$ und damit ist das LGS mehrdeutig lösbar.

$n = 3$, weil wir drei Variablen x_1, x_2, x_3 haben.

④ Lösung bestimmen:

Wir haben 3 Unbekannte/Variablen x_1, x_2, x_3 , aber nur zwei Gleichungen. Deswegen brauchen wir einen frei wählbaren Parameter $t \in \mathbb{R}$ (oder auch Freiheitsgrad $F = 1$):

Setze $t := x_3$ ($t \in \mathbb{R}$)

$$(II) \frac{7}{2}x_2 - 7x_3 = -14 \xrightarrow{x_3=t} \frac{7}{2}x_2 = 7t - 14 \iff 7x_2 = 14t - 28 \iff x_2 = 2t - 4$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 = -4 &\xLeftrightarrow[x_3=t]{x_2=2t-4} -x_1 + \frac{1}{2}(2t-4) - 3t = -4 \iff -x_1 + t - 2 - 3t = -4 \\ &\iff -x_1 = 2t - 2 \iff x_1 = -2t + 2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2t+2 \\ 2t-4 \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$