

Lösung zum 9. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 9 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Beträge und Betragsgleichungen)

a) Stellen Sie die Betragsfunktion als abschnittsweise definierte Funktion dar, indem Sie den Betrag auflösen und eine zweiteilige Funktionsvorschrift angeben:

i) $f(x) = |3x - 7|$

① Kritische Stellen bestimmen: $3x - 7 = 0 \iff x = \frac{7}{3}$

② Abschnittsweise definierte Funktion aufstellen:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7, & x \geq \frac{7}{3} \\ -(3x - 7), & x < \frac{7}{3} \end{cases} = \begin{cases} 3x - 7, & x \geq \frac{7}{3} \\ 7 - 3x, & x < \frac{7}{3} \end{cases}$$

ii) $g(x) = |x^2 + 4x + 3|$

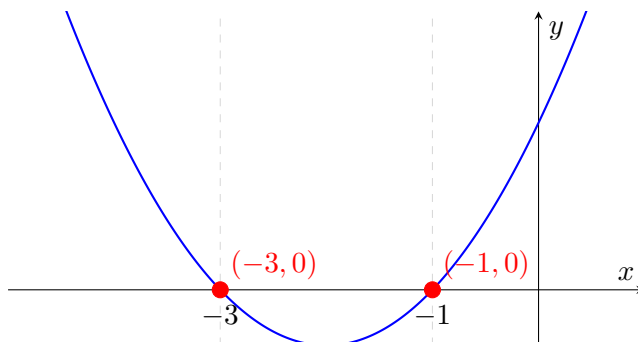
① Kritische Stellen bestimmen:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{pq-Formel}} x_1 = -1 \wedge x_2 = -3$$

② Abschnittsweise definierte Funktion aufstellen:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \in \mathbb{R} \setminus (-3; -1) \\ -(x^2 + 4x + 3), & x \in (-3; -1) \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \in \mathbb{R} \setminus (-3; -1) \\ -x^2 - 4x - 3, & x \in (-3; -1) \end{cases}$$

Hinweis: Jeder Bereich zwischen zwei Nullstellen ist entweder komplett PLUS oder MINUS. Man kann das einfach durch Einsetzen einer einfachen Zahl aus diesem Bereich prüfen! In unserem Fall kann man auch am Graphen gut erkennen:



b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen und geben Sie die Lösungsmenge an.

i) $|3x + 6| - 2x = -5$

① Kritische Stellen bestimmen: $3x + 6 = 0 \iff x = -2$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x \geq -2$, Fall 2: $x < -2$

③ Mit der Fallunterscheidung die Gleichung lösen:

Fall 1: $x \geq -2$

$$|3x + 6| - 2x = -5 \stackrel{x \geq -2}{\iff} 3x + 6 - 2x = -5 \iff x = -11$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq -2$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \{\}$

$$\text{Fall 2: } x < -2$$

$$|3x + 6| - 2x = -5 \stackrel{x < -2}{\iff} -3x - 6 - 2x = -5 \iff -5x = 1 \iff x = -\frac{1}{5}$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < -2$ liefert: $\mathbb{L}_2 = \{\}$

$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{\} \cup \{\} = \{\} = \emptyset$$

ii) $x + |x - 1| = 3$

① Kritische Stelle bestimmen: $x - 1 = 0 \iff x = 1$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x \geq 1$, Fall 2: $x < 1$

③ Mit der Fallunterscheidung die Gleichung lösen:

$$\text{Fall 1: } x \geq 1$$

$$x + |x - 1| = 3 \stackrel{x \geq 1}{\iff} x + x - 1 = 3 \iff 2x = 4 \iff x = 2$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq 1$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \{2\}$

$$\text{Fall 2: } x < 1$$

$$x + |x - 1| = 3 \stackrel{x < 1}{\iff} x + (-(x - 1)) = 3 \iff 1 = 3 \quad \nexists$$

Da wir einen Widerspruch erhalten, ist unsere Aussage für kein x aus unserer

Fallbedingung erfüllt und unsere Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L}_2 = \emptyset$

$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L} = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$$

iii) $2x + |2x + 4| = -4$

① Kritische Stellen bestimmen: $2x + 4 = 0 \iff x = -2$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x \geq -2$, Fall 2: $x < -2$

③ Mit der Fallunterscheidung die Gleichung lösen:

$$\text{Fall 1: } x \geq -2$$

$$2x + |2x + 4| = -4 \stackrel{x \geq -2}{\iff} 2x + 2x + 4 = -4 \iff 4x = -8 \iff x = -2$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq -2$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \{-2\}$

$$\text{Fall 2: } x < -2$$

$$2x + |2x + 4| = -4 \stackrel{x < -2}{\iff} 2x - 2x - 4 = -4 \iff -4 = -4 \quad \checkmark$$

Da wir eine wahre Aussage erhalten, ist unsere Aussage für jedes x aus unserer

Fallbedingung $x < -2$ erfüllt und somit unsere Lösungsmenge: $\mathbb{L}_2 = (-\infty; -2)$

$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L} = (-\infty; -2) \cup \{-2\} = (-\infty; -2]$$

iv) $|x + 3| + |x + 4| - 9 = 0$

① Kritische Stellen bestimmen:

$$x + 3 = 0 \iff x = -3$$

$$x + 4 = 0 \iff x = -4$$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x < -4$, Fall 2: $-4 \leq x < -3$, Fall 3: $x \geq -3$

③ Mit der Fallunterscheidung die Gleichung lösen:

$$\text{Fall 1: } x < -4$$

$$\begin{aligned} |x + 3| + |x + 4| - 9 = 0 &\stackrel{x < -4}{\iff} -(x + 3) + (-(x + 4)) - 9 = 0 \\ &\iff -x - 3 - x - 4 - 9 = 0 \iff -2x = 16 \iff x = -8 \end{aligned}$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < -4$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \{-8\}$

Fall 2: $-4 \leq x < -3$

$$|x+3| + |x+4| - 9 = 0 \stackrel{-4 \leq x < -3}{\iff} -(x+3) + x+4 - 9 = 0 \iff -x-3+x+4-9 = 0 \iff -8 = 0 \quad \nexists$$

$$\mathbb{L}_2 = \emptyset$$

Fall 3: $x \geq -3$

$$|x+3| + |x+4| - 9 = 0 \stackrel{x \geq -3}{\iff} x+3+x+4-9 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq -3$ liefert: $\mathbb{L}_3 = \{1\}$

$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L} = \{-8\} \cup \emptyset \cup \{1\} = \{-8, 1\}$$