

Lösung zum 10. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 10 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Ungleichungen und Betragsungleichungen)

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\text{i) } 2x^2 - 3x - 2 < 2x + 2x^2 + 2 \xLeftrightarrow{+2} 2x^2 - 3x < 2x + 2x^2 + 4 \xLeftrightarrow{-2x^2} -3x < 2x + 4 \\ \xLeftrightarrow{-2x} -5x < 4 \xLeftrightarrow{\cdot(-\frac{1}{5})} x > -\frac{4}{5}$$

$$\text{ii) } x^2 + x + 1 > -3x - 2 \xLeftrightarrow{+2} x^2 + x + 3 > -3x \xLeftrightarrow{+3x} x^2 + 4x + 3 > 0$$

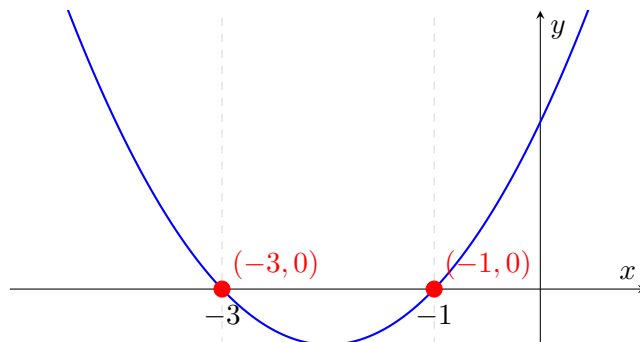
$$\text{Nullstellen bestimmen: } f(x) := x^2 + 4x + 3 \stackrel{!}{=} 0 \iff x_1 = -3 \wedge x_2 = -1$$

Durch Einsetzen prüfen, ob f auf den Abschnitten positiv oder negativ ist:

Für $x < -3$ ist $f(x) > 0$

Für $-3 \leq x < -1$ ist $f(x) \leq 0$

Für $x \geq -1$ ist $f(x) \geq 0$



Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-3; -1]$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Betragsungleichungen erfüllen:

$$\text{i) } |2x - 6| \leq x$$

$$\textcircled{1} \text{ Kritische Stellen bestimmen: } 2x - 6 = 0 \iff x = 3$$

$$\textcircled{2} \text{ Fälle aufstellen: Fall 1: } x \geq 3, \text{ Fall 2: } x < 3$$

$\textcircled{3}$ Mit der Fallunterscheidung die Ungleichung lösen:

$$\boxed{\text{Fall 1: } x \geq 3}$$

$$|2x - 6| \leq x \xLeftrightarrow{x \geq 3} 2x - 6 \leq x \iff x \leq 6$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq 3$ liefert: $\mathbb{L}_1 = [3; 6]$

$$\boxed{\text{Fall 2: } x < 3}$$

$$|2x - 6| \leq x \xLeftrightarrow{x < 3} -2x + 6 \leq x \iff -3x \leq -6 \iff x \geq 2$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < 3$ liefert: $\mathbb{L}_2 = [2; 3)$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = [2; 3) \cup [3; 6] = [2; 6]$

ii) $5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7$

① Kritische Stellen bestimmen: $x - 6 = 0 \iff x = 6$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x \geq 6$, Fall 2: $x < 6$

③ Mit der Fallunterscheidung die Ungleichung lösen:

Fall 1: $x \geq 6$

$$5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7 \xrightarrow{x \geq 6} 5 - 3(x - 6) \leq 3x - 7 \iff 5 - 3x + 18 \leq 3x - 7 \\ \iff -3x + 23 \leq 3x - 7 \iff -6x \leq -30 \iff x \geq 5$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq 6$ liefert: $\mathbb{L}_1 = [6; \infty)$

Fall 2: $x < 6$

$$5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7 \xrightarrow{x < 6} 5 - 3 \cdot (-(x - 6)) \leq 3x - 7 \iff 5 + 3x - 18 \leq 3x - 7 \\ \iff 3x - 13 \leq 3x - 7 \iff -13 \leq -7 \checkmark$$

Bei einer wahren Aussage entspricht die Teillösungsmenge der Fallbedingung, hier $x < 6$:

$$\mathbb{L}_2 = (-\infty; 6)$$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = (-\infty; 6) \cup [6; \infty) = (-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

iii) $|x + 1| - |2x - 6| \leq 10$

① Kritische Stellen bestimmen:

$$x + 1 = 0 \iff x = -1$$

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3$$

② Fälle aufstellen: Fall 1: $x \geq 3$, Fall 2: $-1 \leq x < 3$, Fall 3: $x < -1$

③ Mit Fallunterscheidung die Ungleichung lösen:

Fall 1: $x \geq 3$

$$|x + 1| - |2x - 6| \leq 10 \xrightarrow{x \geq 3} x + 1 - (2x - 6) \leq 10 \iff x + 1 - 2x + 6 \leq 10 \iff -x \leq 3 \iff x \geq -3$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq 3$ liefert: $\mathbb{L}_1 = [3; \infty)$

Fall 2: $-1 \leq x < 3$

$$|x + 1| - |2x - 6| \leq 10 \xrightarrow{-1 \leq x < 3} x + 1 - (-(2x - 6)) \leq 10 \iff x + 1 + 2x - 6 \leq 10 \\ \iff 3x \leq 15 \iff x \leq 5$$

Vergleich mit der Fallbedingung $-1 \leq x < 3$ liefert: $\mathbb{L}_2 = [-1; 3)$

Fall 3: $x < -1$

$$|x + 1| - |2x - 6| \leq 10 \xrightarrow{x < -1} -(x + 1) - (-(2x - 6)) \leq 10 \iff -x - 1 + 2x - 6 \leq 10 \iff x \leq 17$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < -1$ liefert: $\mathbb{L}_3 = (-\infty; -1)$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = (-\infty; -1) \cup [-1; 3) \cup [3; \infty) = \mathbb{R}$

iv) $||x - 5| - 3| \leq 4$

Wir beginnen mit dem inneren Betrag:

① Kritische Stellen bestimmen: $x - 5 = 0 \iff x = 5$

② Fälle aufstellen (für den inneren Betrag): Fall 1: $x \geq 5$, Fall 2: $x < 5$

Fall 1: $x \geq 5$

$$||x - 5| - 3| \leq 4 \xrightarrow{x \geq 5} |x - 5 - 3| \leq 4 \iff |x - 8| \leq 4$$

Jetzt wird der noch vorhandene Betrag mit einer weiteren Fallunterscheidung aufgelöst. Dabei befinden wir uns aber weiterhin im 1. Fall und damit gilt trotzdem noch, dass $x \geq 5$ sein muss.

Kritische Stellen: $x - 8 = 0 \iff x = 8$

Fälle aufstellen: Fall 1a: $x \geq 8$, Fall 1b: $x < 8$

Fall 1a: $x \geq 8$

$$|x - 8| \leq 4 \xLeftrightarrow{x \geq 8} x - 8 \leq 4 \iff x \leq 12$$

Vergleich mit den Fallbedingungen $x \geq 5$ UND $x \geq 8$ liefert: $\mathbb{L}_{1a} = [8; 12]$

Fall 1b: $x < 8$

$$|x - 8| \leq 4 \xLeftrightarrow{x < 8} -(x - 8) \leq 4 \iff -x + 8 \leq 4 \iff -x \leq -4 \iff x \geq 4$$

Vergleich mit den Fallbedingungen $x \geq 5$ UND $x < 8$ liefert: $\mathbb{L}_{1b} = [5; 8)$

Fall 2: $x < 5$

$$||x - 5| - 3| \leq 4 \xLeftrightarrow{x < 5} |-(x - 5) - 3| \leq 4 \iff |-x + 2| \leq 4$$

Kritische Stellen: $-x + 2 = 0 \iff x = 2$

Fälle aufstellen: (2a) $x \geq 2$, (2b) $x < 2$

Fall 2a: $x \geq 2$

$$|-x + 2| \leq 4 \xLeftrightarrow{x \geq 2} -(-x + 2) \leq 4 \iff x - 2 \leq 4 \iff x \leq 6$$

Vergleich mit den Fallbedingungen $x < 5$ UND $x \geq 2$ liefert: $\mathbb{L}_{2a} = [2; 5)$

Fall 2b: $x < 2$

$$|-x + 2| \leq 4 \xLeftrightarrow{x < 2} -x + 2 \leq 4 \iff -x \leq 2 \iff x \geq -2$$

Vergleich mit den Fallbedingungen $x < 5$ UND $x < 2$ liefert: $\mathbb{L}_{2b} = [-2; 2)$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_{2b} \cup \mathbb{L}_{2a} \cup \mathbb{L}_{1b} \cup \mathbb{L}_{1a} = [-2; 2) \cup [2; 5) \cup [5; 8) \cup [8; 12] = [-2; 12]$

Aufgabe 2 (Zusatzaufgabe)

Bitte nicht direkt vorrechnen, sondern die Studis den Rest der Zeit selber rechnen lassen mit der Möglichkeit sich zu melden und Fragen zu stellen. Die Lösung soll am Anfang des nächsten Tutoriums vorgerechnet werden.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen und geben Sie die Lösungsmenge in korrekter Intervallschreibweise an:

$$\begin{aligned} \text{a) } |2x+1| - 5(x+2) &\leq 2(x - |2x+1|) \iff |2x+1| - 5x - 10 \leq 2x - 2|2x+1| \iff 3|2x+1| - 5x - 10 \leq 2x \\ &\iff 3|2x+1| \leq 7x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{Kritische Stellen: } 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Fälle: Fall 1: $x \geq -\frac{1}{2}$, Fall 2: $x < -\frac{1}{2}$

Fall 1: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$3|2x+1| \leq 7x+10 \xLeftrightarrow{x \geq -\frac{1}{2}} 3(2x+1) \leq 7x+10 \iff 6x+3 \leq 7x+10 \iff -7 \leq x$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x \geq -\frac{1}{2}$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$

Fall 2: $x < -\frac{1}{2}$

$$3|2x+1| \leq 7x+10 \xLeftrightarrow{x < -\frac{1}{2}} 3(-2x-1) \leq 7x+10 \iff -6x-3 \leq 7x+10 \iff -1 \leq x$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < -\frac{1}{2}$ liefert: $\mathbb{L}_2 = \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; \infty\right) = [-1; \infty)$

b) $\frac{2x-2}{|x-3|} \leq 1$ mit der kritischen Stelle $x = 3$:

i) Überlegen Sie sich, was in der kritischen Stelle $x = 3$ mit dem Ausdruck $\frac{2x-2}{x-3}$ passiert.
Was fällt auf?

In der kritischen Stelle $x = 3$ wird der Nenner 0 und somit darf $x = 3$ nicht angenommen werden.

ii) Stellen Sie auf Grundlage von i) Ihre Fälle auf und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Betragsungleichung erfüllen:

Fälle: Fall 1: $x > 3$, Fall 2: $x < 3$

Fall 1: $x > 3$

$$\frac{2x-2}{|x-3|} \leq 1 \xrightarrow{x>3} \frac{2x-2}{(x-3)} \leq 1 \iff 2x-2 \leq x-3 \iff x \leq -1$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x > 3$ liefert: $\mathbb{L}_1 = \emptyset$

Fall 2: $x < 3$

$$\frac{2x-2}{|x-3|} \leq 1 \xrightarrow{x<3} \frac{2x-2}{-(x-3)} \leq 1 \iff 2x-2 \leq -x+3 \iff 3x \leq 5 \iff x \leq \frac{5}{3}$$

Vergleich mit der Fallbedingung $x < 3$ liefert: $\mathbb{L}_2 = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$

Insgesamt: $\mathbb{L}_{ges} = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup \emptyset = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$