

Lösung zum 11. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 11 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

a) Berechnen Sie:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^{101} = i^{100} \cdot i = (i^4)^{25} \cdot i = 1^{25} \cdot i = i$$

Wir können feststellen, dass $i^n = i^{n+4}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Koordinatenform $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und geben sie jeweils den Realteil und Imaginärteil an sowie den Betrag:

i) ① In Koordinatenform bringen:

$$z_1 = (3+2i)^2 + (7-3i)(-2+i) = 9+12i+4i^2-14+7i+6i-3i^2 = -5+25i+i^2 \stackrel{i^2=-1}{=} -6+25i$$

② Real- und Imaginärteil angeben:

$$\operatorname{Re}(z_1) = -6 \text{ und } \operatorname{Im}(z_1) = 25$$

Wichtig: Der Imaginärteil wird OHNE i angegeben!

③ Betrag der komplexen Zahl:

$$|z_1| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z_1) + \operatorname{Im}^2(z_1)} = \sqrt{(-6)^2 + 25^2} = \sqrt{36 + 625} = \sqrt{661}$$

ii) ① In Koordinatenform bringen:

$$z_2 = \frac{(6-3i)(2+4i)}{3-4i} = \frac{3(2-i)(1+2i)2}{3-4i} = \frac{6(2+4i-i-2i^2)}{3-4i} = \frac{6(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$\stackrel{i^2=-1}{=} \frac{6(12+16i+9i+12i^2)}{9-16i^2} = \frac{6(25i)}{25} = 0+6i$$

② Real- und Imaginärteil angeben:

$$\operatorname{Re}(z_2) = 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z_2) = 6$$

③ Betrag der komplexen Zahl:

$$|z_2| = |0+6i| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

iii) ① In Koordinatenform bringen:

$$z_3 = (7+2i)(\overline{3+5i}) + 2i^2 + i^3 + i^4 \stackrel{i^2=-1}{=} (7+2i)(3-5i) - 2 - i + 1 = (21-35i+6i+10) - 1 - i$$

$$= 30 - 30i$$

② Real- und Imaginärteil angeben:

$$\operatorname{Re}(z_3) = 30 \text{ und } \operatorname{Im}(z_3) = -30$$

③ Betrag der komplexen Zahl:

$$|z_3| = |30 - 30i| = \sqrt{30^2 + (-30)^2} = \sqrt{2 \cdot 30^2} = \sqrt{2} \cdot 30$$

iv) ① In Koordinatenform bringen:

$$z_4 = (4i - 1) + i(a + i) = (-1 + 4i) + (-1 + ai) = -2 + 4i + ai = -2 + i(4 + a)$$

② Real- und Imaginärteil angeben:

$$\operatorname{Re}(z_4) = -2 \text{ und } \operatorname{Im}(z_4) = 4 + a$$

③ Betrag der komplexen Zahl:

$$|z_4| = |-2 + i(4 + a)| = \sqrt{(-2)^2 + (4 + a)^2} = \sqrt{4 + 4^2 + 2 \cdot 4a + a^2} = \sqrt{a^2 + 8a + 20}$$

c) Zeichnen Sie z_1 und z_2 in die Gaußsche Zahlenebene ein:

Aufgabe 2 (Komplexe Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden komplexen Gleichungen mit $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 + 3i)z + 3 + i = z &\iff (1 + 3i)z - z + 3 + i = 0 \iff z((1 + 3i) - 1) + 3 + i = 0 \\ &\iff z(3i) = -3 - i \iff z = \frac{-3 - i}{3i} = \frac{(-3 - i)(-i)}{3i(-i)} = \frac{3i + i^2}{-3i^2} = \frac{-1 + 3i}{3} = -\frac{1}{3} + i \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} | z = -\frac{1}{3} + i\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2z + 4 = 3\bar{z} + 8i &\iff 2z - 3\bar{z} = -4 + 8i \stackrel{z=x+iy}{\iff} 2(x + iy) - 3(x - iy) = -4 + 8i \\ &\iff 2x + 2iy - 3x + 3iy = -4 + 8i \iff -x + 5yi = -4 + 8i \end{aligned}$$

Realteil beider Seiten vergleichen:

$$-x = -4 \iff x = 4$$

Imaginärteil beider Seiten vergleichen:

$$5y = 8 \iff y = \frac{8}{5}$$

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} | z = x + iy = 4 + \frac{8}{5} \cdot i\}$$

$$\text{c) } z^2 + 6z + 10 = 0 \iff (z + 3)^2 + 1 = 0 \iff (z + 3)^2 = -1 \stackrel{-1=i^2}{\iff} z + 3 = \pm\sqrt{i^2}$$

Wir dürfen nicht den Betrag nehmen. In den reellen Zahlen funktioniert dies, da $|x| \geq 0$ gilt und das Quadrat $|x|^2 = x^2$ eindeutig die positive Wurzel liefert. Im Komplexen gilt dies nicht.

$$\iff z + 3 = i \vee z + 3 = -i$$

$$\iff z_1 = -3 + i \wedge z_2 = -3 - i$$

$$\mathbb{L} = \{3 + i, -3 - i\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -3z^2 + 6z - 15 = 0 &\iff -3(z^2 - 2z + 5) = 0 \iff z^2 - 2z + 5 = 0 \iff (z^2 - 2z + 1) + 4 = 0 \\ &\iff (z - 1)^2 + 4 = 0 \stackrel{-1=i^2}{\iff} z - 1 = \pm\sqrt{4i^2} \end{aligned}$$

$$\iff z - 1 = 2i \vee z - 1 = -2i$$

$$\iff z = 1 + 2i \vee z = 1 - 2i$$

$$\mathbb{L} = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$$